

Exercice 1. Ballon sonde

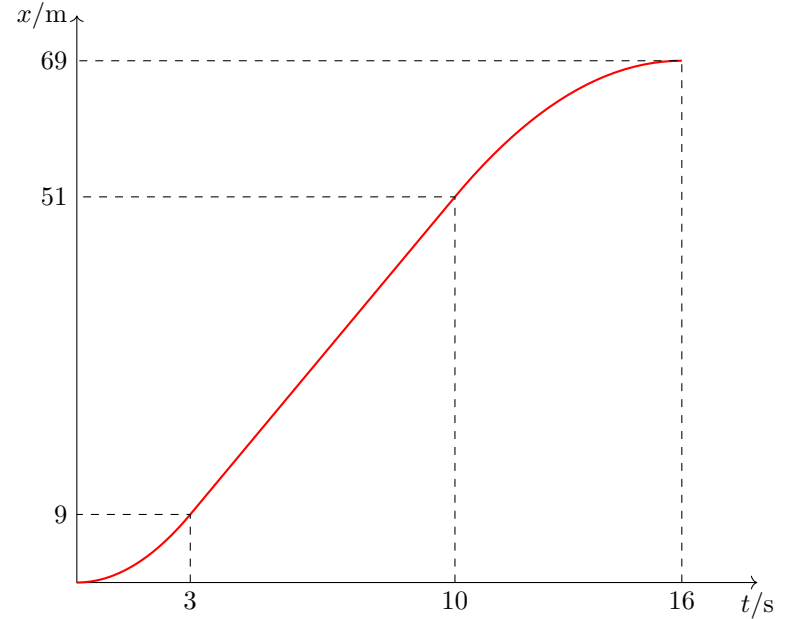
1. Le mouvement sur (Oz) est uniforme à la vitesse v_0 soit $v_z = \dot{z} = v_0$. La solution de condition initiale $z(0) = 0$ est $\boxed{z(t) = v_0 t}$.
2. $v_x = z/\tau$ soit $\dot{x} = (v_0/\tau)t$. La solution de condition initiale $x(0) = 0$ est $\boxed{x(t) = (v_0/\tau)t^2/2}$.
3. On exprime t en fonction de z : $t = z/v_0$. On remplace dans l'expression de $x(t)$:
 $\boxed{x(z) = \frac{z^2}{2v_0\tau}}$. Il s'agit d'une parabole.

Exercice 2. Manège

1. On choisit les coordonnées cylindriques par symétrie du problème.
2. $\boxed{r(t) = a}$; $\boxed{\theta(t) = 2\pi t/T}$; $\boxed{z(t) = h \cos(\omega t)}$.
3. $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = a(2\pi/T)\vec{e}_\theta - h\omega \sin(\omega t)\vec{e}_z$.
 $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(2\pi a/T)^2 + (h\omega \sin(\omega t))^2}$.
4. $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a(2\pi/T)^2\vec{e}_r - h\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_z$.
 $a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{(4\pi^2 a/T^2)^2 + (h\omega^2 \cos(\omega t))^2}$.
5. $\boxed{a_{\max} = a(0) = \sqrt{(4\pi^2 a/T^2)^2 + (h\omega^2)^2} = 0,58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$.
 C'est très inférieur à g , cette accélération est donc faible.

Exercice 3. Ascenseur

1. Le graphe $v = f(t)$ est constitué de trois portions de droites : la première de l'origine au point $A(3\text{ s}, 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$, la seconde horizontale jusqu'au point $B(10\text{ s}, 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$, la troisième de coefficient directeur $-a_d = -1\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ jusqu'à l'axe des abscisses qu'elle coupe à l'instant $t = 16\text{ s}$. Ainsi $\underline{t_d = 6\text{ s}}$.
2. $d = \int_0^d dx = \int_0^{16} v dt$. On estime l'intégrale graphiquement comme l'aire sous la courbe. $d = 9 + 42 + 18 = \underline{69\text{ m}}$.
3. Entre $t = 0$ et $t = 3\text{ s}$: $v = 2t$ donc $\boxed{x = t^2}$. La position atteinte au bout de cette phase est $x_a = \underline{9\text{ m}}$. Le graphe est une parabole de concavité tournée vers le haut.
 Entre $t = 3\text{ s}$ et $t = 10\text{ s}$: $v = 6\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $x = 6t + \text{cste}$. On détermine la constante par la condition initiale : à $t = 3$, $x = 9$ donc $\text{cste} = -9$. Ainsi $\boxed{x = -6t + 9}$. La position atteinte au bout de cette phase est $x_u = \underline{51\text{ m}}$. Le graphe est une droite.
 Entre $t = 10\text{ s}$ et $t = 16\text{ s}$: $v = 16 - t$ donc $x = -t^2/2 + 16t + \text{cste}$. On détermine la constante par la condition initiale : à $t = 10$, $x = 51$ donc $\text{cste} = -59$. Ainsi $\boxed{x = -t^2/2 + 16t - 59}$. Le graphe est une parabole de concavité tournée vers le bas.



Exercice 4. Spirale logarithmique

1. Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit $\boxed{\vec{v} = \frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}(-\vec{e}_r + \omega\tau\vec{e}_\theta)}$.
 Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ soit
 $\boxed{\vec{a} = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}((1 - (\omega\tau)^2)\vec{e}_r - 2\omega\tau\vec{e}_\theta)}$.
2. $\boxed{v = \|\vec{v}\| = \frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$.
 $a = \|\vec{a}\| = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}\sqrt{(1 - (\omega\tau)^2)^2 + (2\omega\tau)^2}$ d'où $\boxed{a = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}(1 + (\omega\tau)^2)}$.
3. $\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{b^2}{\tau^3}(-(1 - (\omega\tau)^2) - 2(\omega\tau)^2)$ soit $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{a} = -\frac{b^2}{\tau^3}(1 + (\omega\tau)^2)}$.
 Or $\vec{v} \cdot \vec{a} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{a}\| \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{a}})$ donc $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{a}}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{a}\|} =$

$$\frac{-\frac{b^2}{\tau^3}(1+(\omega\tau)^2)}{-\frac{b^2}{\tau^3}\sqrt{1+(\omega\tau)^2}(1+(\omega\tau)^2)}. \text{ Pour conclure, } \boxed{\widehat{\vec{v}, \vec{a}} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\right)}.$$

On remarque que cet angle est constant et obtu (son cosinus est négatif) donc que le mouvement est décéléré.

4. La distance élémentaire parcourue pendant la durée dt est $d\ell = vdt$. On l'intègre pour obtenir la distance totale parcourue : $L = \int_0^\infty \frac{b}{\tau} e^{-t/\tau} \sqrt{1+(\omega\tau)^2} dt = \frac{b}{\tau} \sqrt{1+(\omega\tau)^2} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt$ donc $\boxed{L = b\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$.

Exercice 5. Lance-pierre

1. L'accélération de la pomme est $\vec{a} = -g\vec{e}_z$. Puisque $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et que la vitesse initiale de la pomme est nulle, son vecteur vitesse à l'instant t est : $\vec{v}(t) = -gt\vec{e}_z$. Puisque $\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt}$ (P désignant la pomme) et que sa position initiale est $\vec{OP}(t=0) = D\vec{e}_x + H\vec{e}_z$, sa position à l'instant t est :

$$\boxed{\vec{OP}(t) = D\vec{e}_x + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_z}$$

2. Le vecteur vitesse initial de la pierre (point M) est dirigé vers la pomme : sa direction est celle de $\vec{OP}(t=0)$. On construit un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans cette direction en divisant ce vecteur par sa norme : $\vec{u} = \frac{\vec{OP}(t=0)}{\|\vec{OP}(t=0)\|} = \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_x + \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_z$.

Puisque la norme de la vitesse initiale est v_0 , le vecteur vitesse initial de la pomme est : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{u} = v_0 \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_x + v_0 \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_z$.

Puisque l'accélération est $\vec{a} = -g\vec{e}_z$, le vecteur vitesse de la pierre à l'instant t vaut :

$$\vec{v}(t) = v_0 \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_x + \left(v_0 \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - gt\right)\vec{e}_z$$

On primitive pour obtenir son vecteur position $\vec{OM}$. Sachant que sa position initiale est l'origine, il vient :

$$\boxed{\vec{OM}(t) = v_0 t \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_x + \left(v_0 t \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_z}$$

3. La pierre touche la pomme s'il existe un instant $t > 0$ tel que $\vec{OP}(t) = \vec{OM}(t)$ soit :

$$D\vec{e}_x + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_z = v_0 t \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}\vec{e}_x + \left(v_0 t \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_z$$

On identifie selon $\vec{e}_x$: $D = v_0 t \frac{D}{\sqrt{D^2+H^2}}$ d'où $\frac{v_0 t}{\sqrt{D^2+H^2}} = 1$.

Selon $\vec{e}_z$: $H - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}} - \frac{1}{2}gt^2$ d'où $H = v_0 t \frac{H}{\sqrt{D^2+H^2}}$ qui conduit de nouveau à $\frac{v_0 t}{\sqrt{D^2+H^2}} = 1$.

La pierre touche donc la pomme à l'instant $\boxed{t = \frac{\sqrt{D^2+H^2}}{v_0}}$.

Remarque : cet instant n'existe pas toujours, car le mouvement peut être interrompu par l'arrivée de la pomme sur le sol. Il faut donc s'assurer que l'altitude de la pomme reste supérieure à 0 pour cet instant.

Exercice 6. Cycloïde

1. Si la roue ne glisse pas, l'arc IM a même longueur que la longueur OI parcourue au sol. Ainsi $x_C = OI = \widehat{MI}$ c'est-à-dire $\boxed{x_C = R\theta}$.

2. $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$ avec $\vec{OC} = x_C\vec{e}_x + R\vec{e}_y$ et $\vec{CM} = -R(\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y)$. On en déduit $\boxed{x = R(\theta - \sin(\theta))}$ et $\boxed{y = R(1 - \cos(\theta))}$.

3. $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$ donc $\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}((1 - \cos(\theta))\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)}$.

$\vec{IM} = \vec{IC} + \vec{CM} = R\vec{e}_y - R(\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y) = R(-\sin(\theta)\vec{e}_x + (1 - \cos(\theta))\vec{e}_y)$.
On vérifie alors aisément que $\vec{v} \cdot \vec{IM} = 0$ donc que $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{IM}$.
Ceci signifie qu'à tout instant le point M est en rotation autour de I , le point de contact avec le sol.

4. Par définition $d\ell = \|d\vec{OM}\| = \|\vec{v}\|dt$.

$$v^2 = \|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 = (R\dot{\theta})^2((1 - \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) = (R\dot{\theta})^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = (R\dot{\theta})^2(2 - 2\cos(\theta)) = (R\dot{\theta})^2 \times 4\sin^2(\theta/2) = (2R\dot{\theta}\sin(\theta/2))^2.$$

$\sin(\theta/2)$ est positif pour $\theta \in [0, 2\pi]$ donc $v = 2R\dot{\theta}\sin(\theta/2)$. On en déduit $d\ell = 2R\sin(\theta/2)d\theta$.

La longueur de l'arc de cycloïde se calcule en sommant les déplacements élémentaires

pour θ variant de 0 à 2π (soit un tour de roue) :

$$L = \int d\ell = \int_0^{2\pi} 2R \sin(\theta/2) d\theta = 2R[-2\cos(\theta/2)]_0^{2\pi} = 8R$$

Exercice 7. Parking hélicoïdal

Soit T la durée pour faire un tour, et donc de monter d'un étage. Ainsi la vitesse angulaire dans un plan horizontal est $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et la vitesse vertical ascensionnelle est $v_z = \frac{h}{T}$.

En utilisant les coordonnées cylindriques d'axe celui de la rampe :

$$\begin{cases} r(t) &= R \\ \theta(t) &= \frac{2\pi}{T}t \\ z(t) &= \frac{h}{T}t \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur vitesse : $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$ donc la vitesse instantanée est $v_0 = \|\vec{v}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + v_z^2} = \frac{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}{T}$.

Le vecteur accélération est $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = -\frac{4\pi^2 R}{T^2}\vec{e}_r$.

Or $\frac{1}{T^2} = \frac{v_0^2}{(2\pi R)^2 + h^2}$ donc $a = \|\vec{a}\| = \frac{4\pi^2 R v_0^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} = 0,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 8. Poursuite de chats

1. D'après le schéma ci-dessous à gauche, le vecteur vitesse fait un angle $\pi/4$ avec $\vec{e}_\theta$ et

$3\pi/4$ avec $\vec{e}_r$. Alors $\vec{v} = v \cos(3\pi/4)\vec{e}_r + v \cos(\pi/4)\vec{e}_\theta$ soit $\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$.

2. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\dot{r} = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = -v/\sqrt{2}$. On en déduit $r(t) = r_0 - vt/\sqrt{2}$.

3. La poursuite s'arrête quand les chats se retrouvent tous au centre, soit $r(t_f) = 0$. Cela se produit pour $t_f = \sqrt{2}r_0/v$. La distance parcourue par chaque chat est alors $d = vt_f = \sqrt{2}r_0$.

4. $r\dot{\theta} = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = v/\sqrt{2}$ donc $\dot{\theta} = v/(\sqrt{2}r) = \frac{v}{\sqrt{2}r_0 - vt}$. En intégrant on obtient

$$\theta(t) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}r_0 - vt}{\sqrt{2}r_0}\right).$$

5. Ce résultat se met sous la forme $\theta = -\ln(r/r_0)$ donc $r = r_0 e^{-\theta}$. C'est l'équation d'une spirale (logarithmique).

