

Pour commencer

Exercice 1 — Une relation algébrique.



La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation :

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1 , m_2 , v_1 , v_2 et p)

Exercice 2 — Un système de deux équations.



Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la deuxième loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin \alpha = mR\omega^2 \\ F \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T , m , R , ω et g

b) Déterminer α en fonction des données T , m , R , ω et g

Exercice 3 — Quelques équations différentielles.



Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$ et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\frac{dv}{dt} = a_0$

b) $\frac{dv}{dt} = -kv$

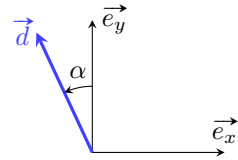
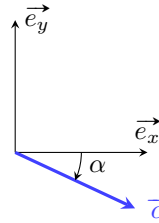
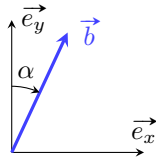
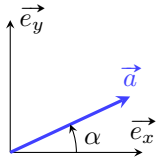
c) $\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$

Décomposition de vecteurs

Exercice 4 — Des projections.



On considère les vecteurs unitaires suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$

c) $\vec{c}$

b) $\vec{b}$

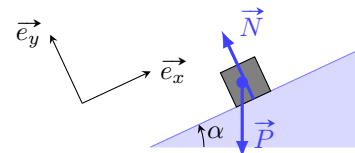
d) $\vec{d}$

Exercice 5 — Sur un plan incliné.



On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs suivants en fonction de α et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{N}$: P et N .



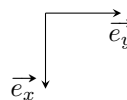
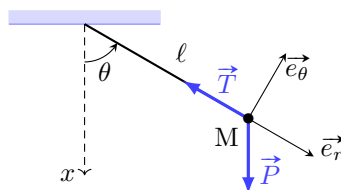
a) $\vec{P}$

b) $\vec{N}$

Exercice 6 — Avec un pendule simple (I).



On considère la situation ci-dessous :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants en fonction de θ et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{T}$: P et T .

a) $\vec{P}$

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) $\vec{T}$

Exercice 7 — Avec un pendule simple (II).

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

a) $\vec{P}$
c) $\vec{P} + \vec{T}$
b) $\vec{T}$
Entre accélération et position**Exercice 8 — Du vecteur position au vecteur accélération.**

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant, $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) position

b) vitesse

c) accélération

Exercice 9 — Du vecteur accélération au vecteur position.

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération

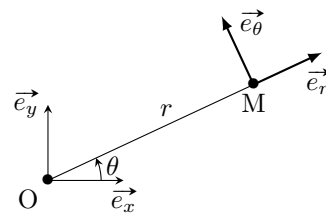
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Exercice 10 — Trois calculs fondamentaux.



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{e}_r$

b) $\vec{e}_\theta$

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ des vecteurs :

c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$

d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$

f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Exercice 11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées polaires ?

Ⓐ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$

Ⓑ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Ⓒ $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

Ⓓ $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Exercice 12 — Accélération en coordonnées polaires.



Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\vec{e}_r$ et de $\vec{e}_\theta$:

a) du vecteur vitesse $\vec{v}$

.....

b) du vecteur accélération $\vec{a}$

.....

Étude de systèmes en équilibre

Exercice 13 — Tension d'un fil.

Une bille d'acier de poids $P = \|\vec{P}\| = 2,0 \text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$, est attirée par un aimant exerçant une force $F = \|\vec{F}\| = 1,0 \text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a :

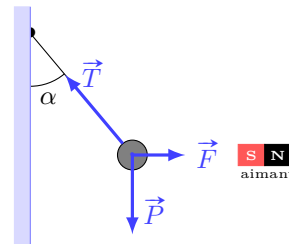
$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.

Calculer les valeurs numériques de :

a) la tension $T = \|\vec{T}\|$ du fil

b) l'angle α (en radians)



Exercice 14 — Masse suspendue.

Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F},$$

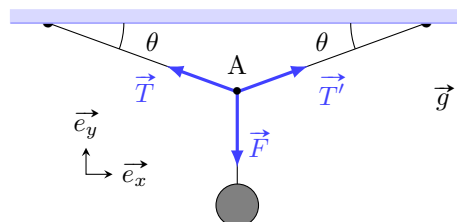
de normes respectives T, T' et F .

On note $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ la résultante des forces.

a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$



Mouvements rectilignes

Exercice 15 — Chute avec frottement.

Un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Lors de sa chute, il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

Exercice 16 — Contact dans un ascenseur.

Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$?

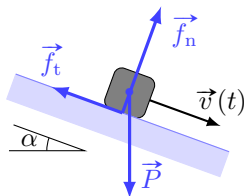
Exercice 17 — Calcul d'une action de contact.

Un bloc de masse m et de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f}_n$;
- une action de frottement $\vec{f}_t$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-dessous :



Déterminer (en fonction d'au moins une des données $P = \|\vec{P}\|$, $v(t)$, m ou α) :

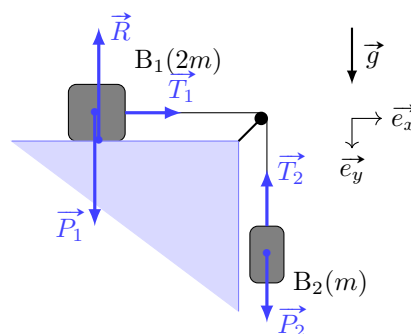
a) l'intensité de l'action normale f_n

b) l'intensité du frottement f_t

Exercice 18 — Calcul d'une accélération.

Deux blocs B_1 et B_2 de masses respectives $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les normes des tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les normes des accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g la valeur du champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

Le fil étant inextensible et sans masse, on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Réponses

1	$\frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	9 c)	$(v_0 t + x_0) \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$
2 a)	$\sqrt{(m R \omega^2 - T)^2 + (m g)^2}$	10 a)	$\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$
2 b)	$\arctan\left(\frac{m R \omega^2 - T}{m g}\right)$	10 b)	$-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$
3 a)	$a_0(t - t_0)$	10 c)	$-\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_y$
3 b)	0	10 d)	$-\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_y$
3 c)	$\frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}]$	10 e)	$\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
4 a)	$\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$	10 f)	$-\dot{\theta} \vec{e}_r$
4 b)	$-\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y$	11	Ⓒ
4 c)	$\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$	12 a)	$\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
4 d)	$-\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y$	12 b)	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$
5 a)	$-P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y$	13 a)	2,2 N
5 b)	$N \vec{e}_y$	13 b)	0,46 rad
6 a)	$P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$	14 a)	$(T' - T) \cos \theta$
6 b)	$-T \vec{e}_r$	14 b)	$(T' + T) \sin \theta - F$
6 c)	$(P \cos(\theta) - T) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$	14 c)	1,17 kN
7 a)	$P \vec{e}_x$	15	1,6 N
7 b)	$-T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$	16	864 N
7 c)	$(P - T \cos(\theta)) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$	17 a)	$P \cos \alpha$
8 a)	$\left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0\right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$	17 b)	$-m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$
8 b)	$a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y$	18 a)	$\frac{T_1}{2m}$
8 c)	$a_0 \vec{e}_x$	18 b)	$g - \frac{T_2}{m}$
9 a)	$g \vec{e}_z$	18 c)	$\frac{g}{3}$
9 b)	$v_0 \vec{e}_x + g t \vec{e}_z$		

Corrigés

2 a) Pour obtenir F , il faut pouvoir éliminer α . L'astuce consiste à utiliser l'identité suivante :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

On a $\begin{cases} F \sin \alpha = mR\omega^2 - T \\ F \cos \alpha = mg \end{cases}$, soit $F^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = F^2 = (mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2$. Finalement, l'intensité d'une force étant positive, on trouve $F = \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$.

2 b) Quand on écrit le système sous la forme $\begin{cases} F \sin \alpha = mR\omega^2 - T \\ F \cos \alpha = mg \end{cases}$, on s'aperçoit qu'il suffit de faire le rapport des deux équations pour éliminer F . On obtient :

$$\tan \alpha = \frac{mR\omega^2 - T}{mg}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right).$$

3 a) La solution générale s'écrit $v(t) = a_0 t + C_1$, où C_1 est une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la condition $v(t_0) = 0$. Cette condition donne $C_1 = -a_0 t_0$, d'où la solution $v(t) = a_0(t - t_0)$.

3 b) La solution générale s'écrit $v(t) = Ae^{-kt}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ implique $A = 0$ puisque $e^{-kt} > 0$ pour tout t . Ainsi la solution est $v(t) = 0$.

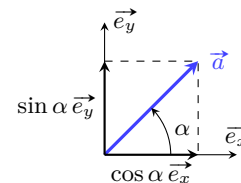
3 c) La solution de l'équation homogène est $v(t) = Ae^{-kt}$. Une solution particulière (constante) est $v = \frac{a_0}{k}$. Les solutions sont $v(t) = Ae^{-kt} + \frac{a_0}{k}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ donne $A = -\frac{a_0}{k}e^{kt_0}$. Il en découle la solution générale : $v(t) = \frac{a_0}{k}[1 - e^{-k(t-t_0)}]$.

4 a)

La composante suivant $\vec{e}_x$ correspond au produit scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = 1 \times \cos(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e}_y$ est le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{e}_y = 1 \times \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$. On peut retrouver ces résultats géométriquement (cf. ci-contre).



4 b)

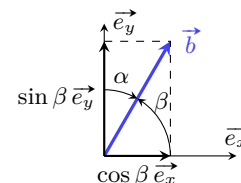
Sur le schéma proposé, $-\pi/2 < \alpha < 0$. On peut introduire β tel que $\beta - \alpha = \pi/2$. La composante suivant $\vec{e}_x$ vaut :

$$b_x = \vec{b} \cdot \vec{e}_x = \cos(\beta) = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e}_y$ vaut :

$$b_y = \vec{b} \cdot \vec{e}_y = \sin(\beta) = \cos(\alpha).$$

On peut vérifier le résultat pour quelques situations : $\alpha = 0$, où $\vec{b} = \vec{e}_y$; ou bien $\alpha = -\pi/2$, où $\vec{b} = \vec{e}_x$.



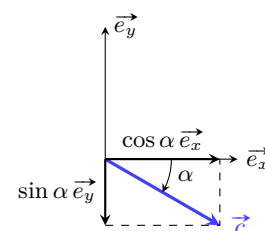
4 c)

Il s'agit de la même situation que pour le vecteur $\vec{a}$ mais avec un angle α orienté comme sur le schéma proposé et donc tel que $-\pi/2 < \alpha < 0$.

On a :

$$c_x = \vec{c} \cdot \vec{e}_x = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad c_y = \vec{c} \cdot \vec{e}_y = \sin(\alpha).$$

On retrouve ces projections à l'aide de la construction ci-contre.



4 d)

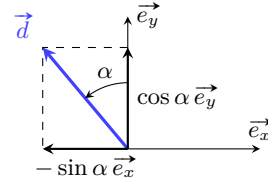
On trouve :

$$d_x = \vec{d} \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

et

$$d_y = \vec{d} \cdot \vec{e}_y = \cos(\alpha).$$

La construction ci-contre confirme ces projections.



5 a)

La composante suivant $\vec{e}_x$ du poids est $P_x = \vec{P} \cdot \vec{e}_x = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\alpha)$. De même, sa composante suivant $\vec{e}_y$ s'écrit $P_y = \vec{P} \cdot \vec{e}_y = P \cos(\alpha + \pi) = -P \cos(\alpha)$. Ainsi, le poids s'écrit :

$$\vec{P} = -P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y.$$

5 b)

Le vecteur $\vec{N}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_y$ et de même sens ; on a donc $\vec{N} = N \vec{e}_y$.

6 a)

La composante suivant $\vec{e}_r$ du poids est $P_r = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \cos(\theta)$. De même, sa composante suivant $\vec{e}_\theta$ s'écrit $P_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\theta)$. Ainsi, le poids s'écrit :

$$\vec{P} = P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta.$$

6 b)

Le vecteur $\vec{T}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_r$ et de sens opposé ; on a donc $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.

7 a)

Le poids $\vec{P}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{e}_x$; on a donc $\vec{P} = P \vec{e}_x$.

7 b)

La composante suivant $\vec{e}_x$ de la tension du fil $\vec{T}$ est $T_x = \vec{T} \cdot \vec{e}_x = T \cos(\pi - \theta) = -T \cos(\theta)$.

De même, sa composante suivant $\vec{e}_y$ vaut $T_y = \vec{T} \cdot \vec{e}_y = T \cos(\pi/2 + \theta) = -T \sin(\theta)$. Finalement, on trouve :

$$\vec{T} = -T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y.$$

8 a)

Le vecteur position est le vecteur $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, d'où :

$$\vec{OM} = \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0 \right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z.$$

8 b)

Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y.$$

8 c)

Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'exprime en fonction des dérivées secondes des coordonnées : $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z = a_0 \vec{e}_x$.

9 a)

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a $m g \vec{e}_z = m \vec{a}$, d'où $\vec{a} = g \vec{e}_z$.

9 b)

L'accélération s'écrit $\vec{a} = \dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z$. On en déduit :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = g \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = gt + C_3. \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Finalement, on trouve $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + gt \vec{e}_z$.

9 c) Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Par identification avec l'expression obtenue précédemment, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = gt \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = v_0 t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = \frac{1}{2}gt^2 + C_6. \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent $C_4 = x_0$, $C_5 = y_0$ et $C_6 = 0$. Finalement, on trouve :

$$\vec{OM} = (v_0 t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z.$$

10 a) On a $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$ et $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$, d'où $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$.

10 b) On a $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y = \cos(\theta)$, d'où $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$.

10 c) Il suffit de dériver le vecteur $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$, en utilisant le fait que $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont des constantes (vectorielles).

On a donc $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_y$. Ici, θ dépend du temps, par conséquent on a :

$$\frac{d\cos(\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta).$$

De même, on a $\frac{d\sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta}\cos(\theta)$. Finalement, on trouve :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_y.$$

10 d) En partant de $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$, on trouve :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_y = \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_y.$$

11 Le vecteur $\vec{OM}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{e}_r$. Sa norme étant égale à r , on a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

12 a) Il suffit de dériver le vecteur position en utilisant les résultats des exercices précédents. On trouve :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

12 b) Dérivons le vecteur vitesse :

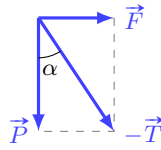
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

13 a) Calculons le carré scalaire :

$$\vec{T}^2 = (-\vec{F} - \vec{P})^2 = F^2 + P^2 + 2\vec{F} \cdot \vec{P} = 5,$$

car $\vec{F} \cdot \vec{P} = 0$. Par conséquent, $T = \sqrt{5\text{ N}^2} \simeq 2,2\text{ N}$.

- 13 b)** Une construction géométrique permet de trouver immédiatement l'angle α :



$$\tan \alpha = F/P \quad \text{soit} \quad \alpha = 0,46 \text{ rad.}$$

On peut aussi utiliser les produits scalaires. Par exemple :

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = T \times F \cos(\pi/2 + \alpha) = -TF \sin \alpha.$$

De plus, compte tenu de l'équilibre des forces, on a :

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = (-\vec{F} - \vec{P}) \cdot \vec{F} = -F^2 - \vec{P} \cdot \vec{F} = -F^2.$$

Il en découle $\sin \alpha = F/T$, soit $\alpha = 0,46 \text{ rad}$ (c'est-à-dire $\alpha = 26^\circ$).

- 14 a)** On a $\vec{R} = \vec{T} + \vec{T}' + \vec{F}$. La composante horizontale de $\vec{R}$ vaut :

$$R_x = \vec{R} \cdot \vec{e}_x = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_x}_{-T \cos \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_x}_{T' \cos \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_0 = (T' - T) \cos \theta.$$

- 14 b)** La composante verticale de $\vec{R}$ s'écrit :

$$R_y = \vec{R} \cdot \vec{e}_y = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_y}_{T \sin \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_y}_{T' \sin \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_y}_{-F} = (T' + T) \sin \theta - F.$$

- 14 c)** Résoudre l'équation vectorielle $\vec{R} = \vec{0}$, c'est résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (T' - T) \cos \theta = 0 \\ (T' + T) \sin \theta - F = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T' = T \\ T = \frac{F}{2 \sin \theta}. \end{cases}$$

Sachant que $F = 800 \text{ N}$ et $\theta = 20^\circ$, on obtient $T = 1,17 \text{ kN}$.

- 15** Le principe fondamental de la dynamique impose $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant la relation précédente suivant la verticale descendante, on obtient $mg - F = ma$, ce qui donne $F = m(g - a) = 1,6 \text{ N}$.

- 16** L'homme subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de contact due à l'ascenseur $-\vec{F}$ (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique donne $m\vec{g} - \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant sur la verticale ascendante, on obtient $ma = -mg + F$, soit $F = m(a + g) = 80 \text{ kg} \times 10,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 864 \text{ N}$.

- 17 a)** Le principe fondamental de la dynamique donne $\vec{P} + \vec{f}_n + \vec{f}_t = m\vec{a}$, avec $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t$ ($\vec{e}_t$ est le vecteur unitaire orienté suivant le vecteur vitesse ; c'est le vecteur tangent au vecteur vitesse dans la base de Frenet). Si l'on projette la relation suivant la normale $\vec{e}_n$ au support, on aboutit à :

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_n}_{P \cos(\pi - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_n}_{f_n} + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_n}_0 = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_n}_0,$$

ce qui donne $f_n = -P \cos(\pi - \alpha) = P \cos \alpha$.

- 17 b)** En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant la direction tangentielle au support, on obtient :

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_t}_{P \cos(\pi/2 - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_t}_0 + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_t}_{-f_t} = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t}_1,$$

c'est-à-dire $f_t = -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$.

18 a) Le principe fondamental appliqué au bloc B₁ donne $2m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T}_1 = 2m\vec{a}_1$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$2m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{T}_1 \cdot \vec{e}_x}_{T_1} = 2m \underbrace{\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_x}_{a_1} \quad \text{soit} \quad a_1 = \frac{T_1}{2m}.$$

18 b) Le principe fondamental appliqué au bloc B₂ donne $m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_2$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}_g + \underbrace{\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_y}_{-T_2} = m \underbrace{\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_y}_{a_2} \quad \text{soit} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

18 c) On a les relations :

$$a_1 = \frac{T_1}{2m} \quad \text{et} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

Multiplions la première relation par $2m$, et la deuxième par m , puis additionnons-les. On trouve :

$$2ma_1 + ma_2 = T_1 + mg - T_2.$$

Comme $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$, on obtient $3ma_1 = mg$, soit $a_1 = a_2 = g/3$.