

Exercice 1. Glaçon qui flotte

1. On se place dans le référentiel au glon, supposé galiléen. On note $\vec{e}_z$ la verticale ascendante.

Le glaçon est soumis :

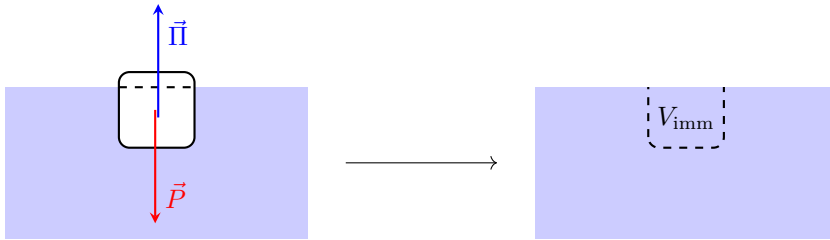
- à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -\rho(\text{glace})Vg\vec{e}_z$;
- à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho(\text{eau})V_{\text{imm}}g\vec{e}_z$.

Il est à l'équilibre donc la résultante des forces s'annule : $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ soit en projetant sur $\vec{e}_z$:

$$\rho(\text{eau})V_{\text{imm}}g - \rho(\text{glace})Vg = 0.$$

On en déduit la portion immergée du glaçon :

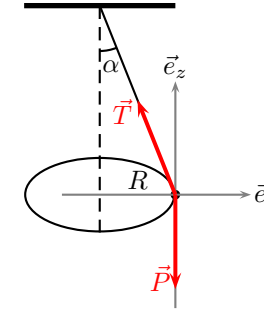
$$p = \frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{\rho(\text{glace})}{\rho(\text{eau})} = 92\%$$



2. Après avoir fondu, le glaçon est sous forme d'eau liquide, mais n'a pas changé de masse : son volume est alors $V_f = \frac{m}{\rho(\text{eau})} = \frac{\rho(\text{glace})V}{\rho(\text{eau})} = V_{\text{imm}}$.

Pour conclure, le glaçon une fois fondu occupe le volume qui était initialement immergé sous la surface de l'eau. Le niveau de l'eau est ainsi **inchangé**.

Exercice 2. Pendule conique



1. Le mouvement du point matériel est circulaire de rayon $R = L \sin(\alpha)$ constant. Dans la base cylindrique, son accélération a pour expression

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Les forces exercées sont :

- le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
- La tension du fil $\vec{T} = -T \sin(\alpha) \vec{e}_r + T \cos(\alpha) \vec{e}_z$.

D'après la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$. En projetant sur les 3 axes ($\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) il vient :

$$\begin{cases} 0 &= -mg + T \cos(\alpha) \\ -mR\dot{\theta}^2 &= -T \sin(\alpha) \\ mR\ddot{\theta} &= 0 \end{cases}$$

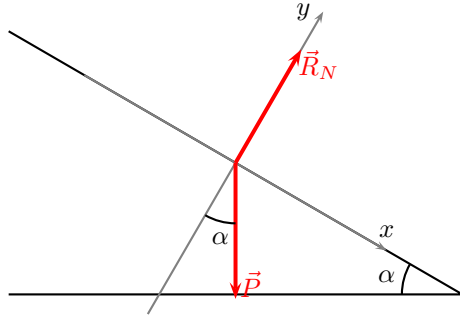
Par conséquent, la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est constante, $T = mg / \cos(\alpha)$ et $mR\dot{\theta}^2 = mg \tan(\alpha)$ d'où on tire la valeur de la vitesse angulaire :

$$\omega = \sqrt{(g/R) \tan(\alpha)} = \sqrt{\frac{g}{L \cos(\alpha)}}$$

2. Puisque $\cos(\alpha) \leq 1$, $\omega \geq \sqrt{g/L}$. La valeur minimale de la vitesse angulaire est donc

$$\omega_l = 6,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ce qui fait un tour par seconde.}$$

Exercice 3. Skieur



1. On choisit un repère cartésien avec $\vec{e}_x$ le long de la pente orienté vers le bas, $\vec{e}_y$ selon la normale ascendante. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ donc $\vec{a} = a_x \vec{e}_x$.

Les forces exercées sur le skieur sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg \sin(\alpha) \vec{e}_x - mg \cos(\alpha) \vec{e}_y$;
- la réaction normale du support $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_y$.

La deuxième loi de Newton appliquée au skieur dans le référentiel terrestre supposé galiléen, s'écrit : $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.

En projetant sur $\vec{e}_y$, on obtient : $-mg \cos(\alpha) + R_N = 0$ d'où $R_N = mg \cos(\alpha)$.

En projetant sur $\vec{e}_x$, on obtient : $mg \sin(\alpha) = ma_x$ donc l'accélération vaut $a_x = \ddot{x} = g \sin(\alpha) = 4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. On intègre : $v_x(t) = \dot{x} = a_x t$ et $x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$ en prenant l'origine du repère en haut de la pente.

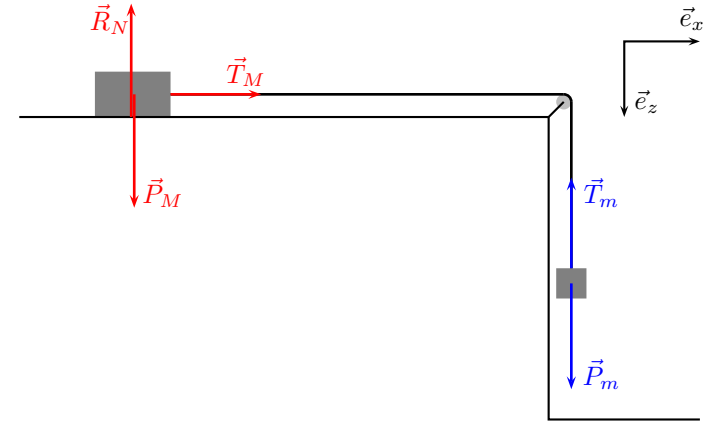
3. L'instant t_f auquel le skieur atteint le bas de la piste est tel que $L = \frac{1}{2} a_x t_f^2$ donc $t_f = \sqrt{2L/a_x}$.

La vitesse atteinte à ce moment-là vaut $v_f = v_x(t_f) = \sqrt{2La_x} = 70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $252 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ce qui est impossible en pratique sur une piste aussi peu inclinée.

4. Les forces de frottement fluide deviennent importantes à grande vitesse et conduisent à une vitesse limite pour le skieur.
5. En ajoutant cette force $\vec{F} = -\beta v_x^2 \vec{e}_x$, la deuxième loi de Newton projetée sur $\vec{e}_x$ devient $mg \sin(\alpha) - \beta v_x^2 = ma_x$.

La vitesse limite atteinte est telle que $a_x = 0$: c'est $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\beta} \sin(\alpha)} = 44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $159 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ce qui est bien plus réaliste.

Exercice 4. Entraînement par poulie



1. On se place dans le référentiel lié à la table, supposé galiléen. On note $\vec{e}_x$ la direction horizontale dirigée le long du fil vers la poulie, et $\vec{e}_z$ la direction verticale descendante.

Le pavé est soumis à son poids $\vec{P}_M = M\vec{g} = Mg \vec{e}_z$; à la réaction normale de la table $\vec{R}_N = -R_N \vec{e}_z$ et à la tension du fil $\vec{T}_M = T \vec{e}_x$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P}_M + \vec{R}_N + \vec{T}_M = M\vec{a}_M$ où l'accélération du pavé vérifie $\vec{a}_M = a_M \vec{e}_x$.

En projetant sur $\vec{e}_x$, il vient $T = Ma_M$.

La masselotte est soumise à son poids $\vec{P}_m = m\vec{g} = mg \vec{e}_z$ et à la tension du fil $\vec{T}_m = -T \vec{e}_z$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P}_m + \vec{T}_m = m\vec{a}_m$ où l'accélération de la masselotte vérifie $\vec{a}_m = a_m \vec{e}_z$.

En projetant sur $\vec{e}_z$, il vient $mg - T = ma_m$.

2. Le fil étant inextensible, la pavé et la masselotte ont le même mouvement, donc la même accélération a (en norme) : $a_M = a_m = a$.

On reporte l'expression de T de la première relation obtenue dans la deuxième : $mg - Ma = ma$. On en déduit que l'accélération des deux systèmes vaut :

$$a = \frac{m}{M + m} g$$

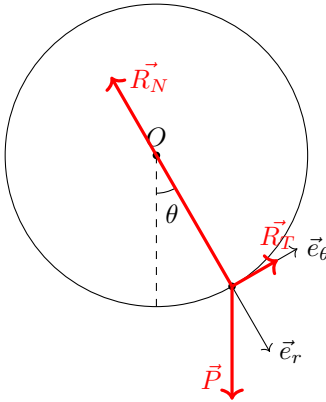
3. On intègre successivement : la vitesse vérifie $v(t) = at$ et la distance parcourue par la masselotte $z(t) = \frac{1}{2} at^2$.

La masselotte s'arrête à l'instant t_f tel que $z(t_f) = h$ soit $t_f = \sqrt{\frac{2h}{a}}$. La vitesse atteinte est alors :

$$v(t_f) = at_f = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \frac{m}{M+m} gh}$$

Ensuite, le fil se détend et le pavé n'est plus soumis qu'à des forces verticales qui se compensent. Il est alors en mouvement **rectiligne et uniforme**.

Exercice 5. Sèche-linge



1. La chaussette étant collée au tambour, elle a un mouvement circulaire de vitesse angulaire constante $\omega = 50 \times 2\pi \text{ rad}/60 \text{ s} = 5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dans la base cylindrique d'axe celui du tambour, $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$.

2. On choisit θ relativement à la verticale descendante. La chaussette est soumise :

- à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos(\theta)\vec{e}_r - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta$,
- à la réaction normale du tambour $\vec{R}_N = -R_N\vec{e}_r$,
- et à la réaction tangentielle $\vec{R}_T = R_T\vec{e}_\theta$.

D'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.

En projetant sur $\vec{e}_r$: $mg\cos(\theta) - R_N = -mR\omega^2$.

En projetant sur $\vec{e}_\theta$: $-mg\sin(\theta) + R_T = 0$.

Ainsi $R_N = m(g\cos(\theta) + R\omega^2)$ et $R_T = mg\sin(\theta)$.

3. $R_N = 0$ pour $\theta = \arccos(-R\omega^2/g) = 147^\circ$.
4. Lorsque la réaction normale s'annule, le contact est rompu. La chaussette a alors un mouvement de chute libre à l'intérieur du tambour jusqu'à retomber sur le tambour et se retrouver entraînée dans la rotation.

Exercice 6. Plongeon

1. D'après le cours, on a $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ et $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t$.
2. Il rentre dans l'eau lorsque $z = -h$ soit à l'instant t_e tel que $-\frac{g}{2}t_e^2 + v_0 \sin(\alpha)t_e + h = 0$.

$$t_e \text{ est la racine positive : } t_e = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} = 1,03 \text{ s.}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont alors : $v_{ex} = v_x(t_e) = v_0 \cos(\alpha) = 3,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

et $v_{ez} = -gt_e + v_0 \sin(\alpha) = -\sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh} = -5,84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. La poussée d'Archimède a pour expression : $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{eau}} V \vec{g}$. La densité étant définie comme le rapport des masses volumiques du corps considéré et de l'eau, la masse du plongeur vaut $m = \rho V = d_h \rho_{\text{eau}} V$ d'où $\rho_{\text{eau}} V = \frac{m}{d_h}$. Ainsi $\vec{\Pi} = -\frac{m}{d_h} \vec{g}$.

D'après le PFD $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\vec{a}$ soit $m(1 - 1/d_h)\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. C'est une équation différentielle du premier ordre pour $\vec{v}(t)$.

4. La solution de l'équation homogène est $\vec{v}_h(t) = \vec{A} \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \frac{m}{k} = 0,28 \text{ s}$ et $\vec{A}$ un vecteur quelconque.

Une solution particulière est le vecteur constant $\vec{v}_P = \frac{m}{k}(1 - 1/d_h)\vec{g} = 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \vec{u}_z$.

Donc la solution générale est : $\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_P$.

La condition initiale (on prend $t = t_e$ comme nouvelle origine des dates) est : $\vec{v}(0) = \vec{v}_e$ ce qui donne $\vec{v}_P + \vec{A} = \vec{v}_e$. On en déduit $\vec{A} = \vec{v}_e - \vec{v}_P$.

La solution est donc $\vec{v}(t) = \vec{v}_P + (\vec{v}_e - \vec{v}_P) \exp(-t/\tau)$.

5. La composante verticale de la vitesse est $v_z(t) = v_{Pz} + (v_{ez} - v_{Pz}) \exp(-t/\tau)$ que l'on intègre pour obtenir $z(t) = v_{Pz}t - \tau(v_{ez} - v_{Pz})(\exp(-t/\tau) - 1)$ (avec la condition initiale $z(0) = 0$).

La profondeur est alors $p = -z = -v_{Pz}t + \tau(v_{Pz} - v_{ez})(1 - \exp(-t/\tau))$.

6. Le plongeur commence à remonter lorsque $v_z = 0$ donc à l'instant t_r tel que $v_{Pz} + (v_{ez} - v_{Pz}) \exp(-t_r/\tau) = 0$.

Il vient $t_r = -\tau \ln\left(\frac{v_{Pz}}{v_{Pz} - v_{ez}}\right) = 0,84 \text{ s}$.

La profondeur atteinte vaut $p(t_r) = -v_{ez}\tau - v_{Pz}t_r = 1,4 \text{ m}$.

C'est du bon ordre de grandeur, même si cela semble un peu faible. La constante k est peut-être surevaluée.