

Énergies potentielles

Exercice 1 — La juste formule.



On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

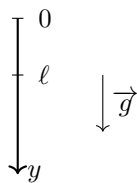
- (a) mgx (b) $-mgy$ (c) mgz (d) mgz

Exercice 2 — Plusieurs expressions de l'énergie potentielle de pesanteur.

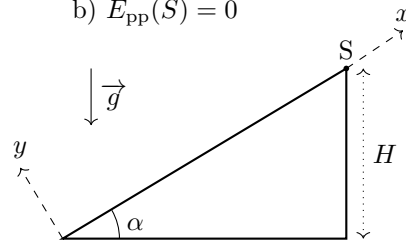


Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

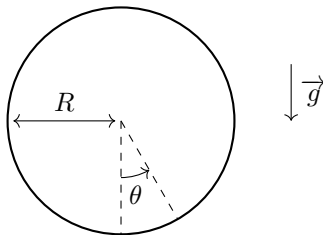
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



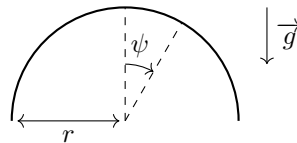
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) = \dots\dots\dots$

c) $E_{pp}(\theta) = \dots\dots\dots$

b) $E_{pp}(x) = \dots\dots\dots$

d) $E_{pp}(\psi) = \dots\dots\dots$

Exercice 3 — La juste formule... le retour.



On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

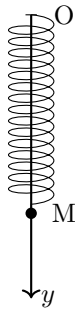
Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

- (a) $\frac{1}{2}ky^2$ (b) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2$ (c) $\frac{1}{2}k(y^2 - \ell_0^2)$ (d) $-\frac{1}{2}k(\ell_0 - y)^2$

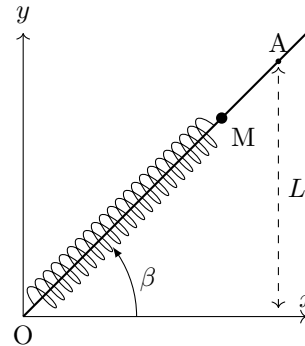
Exercice 4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

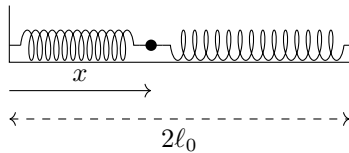
a) $E_{\text{pe}}(y = 0) = 0$



b) $E_{\text{pe}}(A) = 0$



c) $E_{\text{pe}}(x = \ell_0) = E_0$



a) $E_{\text{pe}}(y) = \dots\dots\dots$

b) $E_{\text{pe}}(x) = \dots\dots\dots$

c) $E_{\text{pe}}(x) = \dots\dots\dots$

Travail d'une force

Exercice 5 — Une force de frottement.



On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

- a) Un segment reliant A(0,0) et B(ℓ ,0)
- b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R
- c) Un rectangle ABCD de côtés a et b
- d) Un triangle ABC de côtés a, b, c
- e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?
 (a) Oui (b) Non

Théorèmes énergétiques

Exercice 6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.



On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h \vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

- (a) $\frac{2mv_0^2}{h}$ (b) $\frac{mv_0^2}{h}$ (c) $\frac{mv_0^2}{2h}$

Exercice 7 — Pendule simple.



Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1,0$ m auquel est accrochée une masse $m = 100$ g.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, où $v_0 = 2,0$ m · s⁻¹.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

- a) Exprimer $\cos(\theta_0)$
- b) Calculer θ_0

Exercice 8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30 \text{ cm}$, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2,0 \text{ m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1,0 \text{ kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

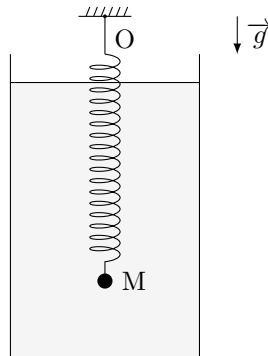
a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort

b) L'altitude minimale atteinte par la masse

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Exercice 9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z .

.....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ .

.....

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

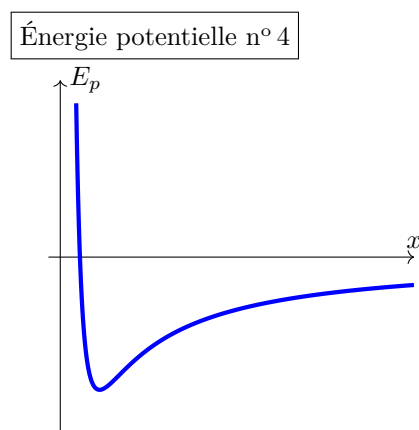
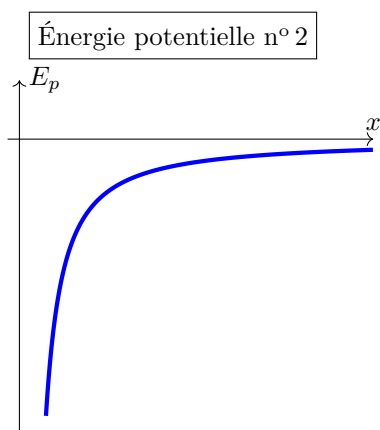
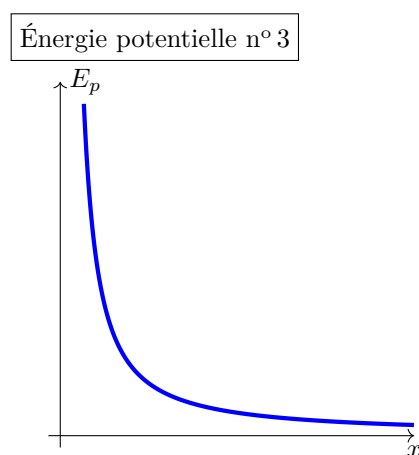
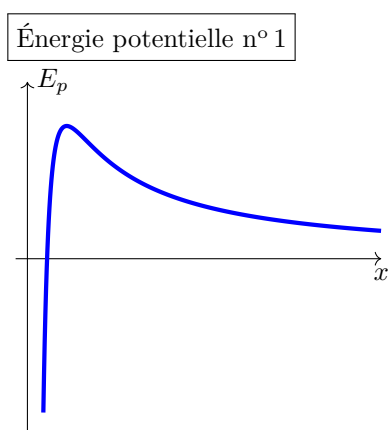
Exercice 10 — Profils d'énergies potentielles.



Les quatre profils ci-après représentent la fonction énergie potentielle suivante :

$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},$$

avec α, β des réels non nuls.



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β , en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1

c) Énergie potentielle n° 3

b) Énergie potentielle n° 2

d) Énergie potentielle n° 4

Exercice 11 — Autour d'une position d'équilibre.

On donne l'expression de potentiels E_p , dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m .

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

c) Pour $E_p(x) = U_0 e^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

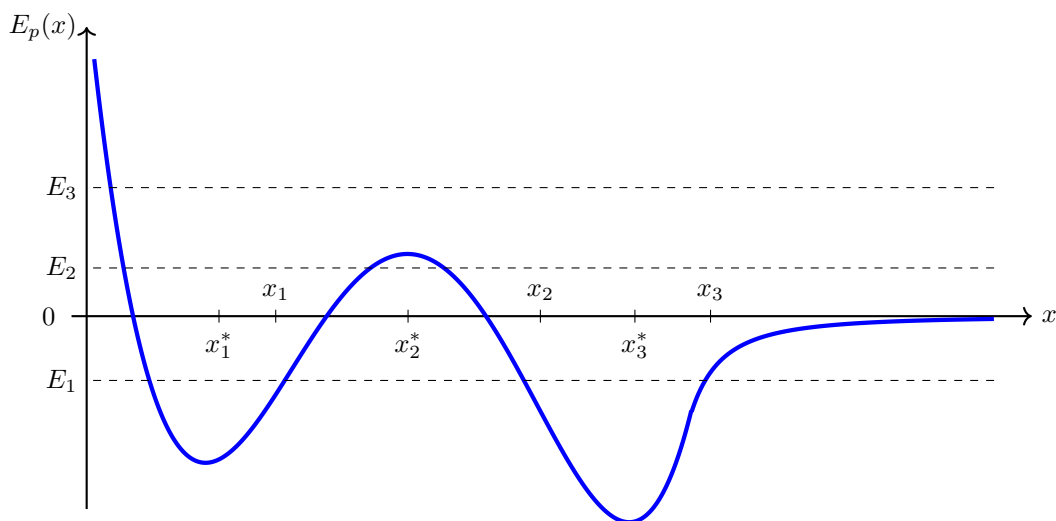
Exercice 12 — État lié ou état de diffusion ?

On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié

(b) dans un état de diffusion



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$

Exercice 13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.

On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) équilibre stable

(c) mouvement périodique

(b) équilibre instable

(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^*

c) Voisinage de x_3^*

b) Voisinage de x_2^*

d) Région entre x_2 et x_3

Exercice 14 — Vitesse à l'infini.

On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2,30$ kg est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1,30$ kJ.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini

Réponses

1 (c)

2 a) $mg(\ell - y)$ 2 b) $mg(x \sin(\alpha) - H)$ 2 c) $-mgR \cos(\theta)$ 2 d) $mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$

3 (b)

4 a) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$ 4 b) $\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ 4 c) $E_0 + k(x - \ell_0)^2$ 5 a) $-h\ell$ 5 b) $-hR\alpha$ 5 c) $-(2a + 2b)h$ 5 d) $-(a + b + c)h$

5 e) (b)

6 (c)

7 a) $1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$ 7 b) $0,65 \text{ rad} = 37^\circ$ 8 a) $5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 8 b) $0,11 \text{ m}$ 8 c) $2,0 \text{ m}$ 9 a) $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$ 9 b) $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$

10 a) (b)

10 b) (d)

10 c) (a)

10 d) (c)

11 a) 0

11 b) 0

11 c) 0

11 d) a

12 a) (a)

12 b) (a)

12 c) (a)

12 d) (b)

12 e) (b)

12 f) (b)

13 a) (a), (c) et (d)

13 b) (b)

13 c) (a), (c) et (d)

13 d) (a) et (c)

14 $33,6 \text{ m/s}$

Corrigés

2 a) L'axe est ici orienté vers le bas, on a donc $E_{pp}(y) = -mgy + K_1$. On veut $E_{pp}(\ell) = 0$, d'où $K_1 = mg\ell$. Finalement, on a $E_{pp}(y) = mg(\ell - y)$.

2 b) On peut raisonner de deux manières :

- La coordonnée verticale (axe de $\vec{g}$) z est liée à x par $z = x \sin(\alpha)$. On a donc $E_{pp} = mgx \sin(\alpha) + K_2$.
L'énergie potentielle étant nulle en $z = H$, on a $E_{pp}(x) = mg(x \sin(\alpha) - H)$.
- Dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on a $\vec{g} = -g \sin(\alpha) \vec{e}_x - g \cos \alpha \vec{e}_y$.
On en déduit le travail élémentaire pour un déplacement selon x :

$$\delta W = -mg \sin(\alpha) dx = -d(mgx \sin(\alpha) + K_2) = -dE_{pp}.$$

On en déduit que $E_{pp}(x) = mgx \sin(\alpha) + K_2$.

L'énergie potentielle devant être nulle en S , qui correspond à $x = \frac{H}{\sin(\alpha)}$, on a $K_2 = -mgH$, d'où le résultat.

2 c) Dans la base polaire, l'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = g \cos(\theta) \vec{e}_r - g \sin(\theta) \vec{e}_\theta$. Donc, le travail élémentaire pour un déplacement sur le cercle (selon $\vec{e}_\theta$) est :

$$\delta W = m \vec{g} \cdot d\vec{OM} = -mg \sin(\theta) R d\theta = -d(-mgR \cos(\theta) + K_3) = -dE_{pp}.$$

On a donc $E_{pp}(\theta) = -mgR \cos(\theta) + K_3$ et, comme on veut $E_{pp}(\pi/2) = 0$, on a $K_3 = 0$. Ainsi, on a :

$$E_{pp}(\theta) = -mgR \cos(\theta).$$

2 d) Fixons un axe (Oz) vertical ascendant avec O au centre du cercle. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit alors $E_{pp} = mgz + K_4$. Or, on a $z = r \cos(\psi)$, d'où $E_{pp} = mgr \cos(\psi) + K_4$.

La convention choisie ($E_{pp}(\psi = 0) = E_0$) entraîne que :

$$mgr \cos(0) + K_4 = E_0, \quad \text{d'où} \quad K_4 = E_0 - mgr.$$

Finalement, on trouve :

$$E_{pp} = mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0.$$

4 a) L'axe est orienté vers le bas, la longueur du ressort s'identifie donc directement à la coordonnée y .

La force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(y - \ell_0) \vec{e}_y$. On en déduit donc (en calculant le travail élémentaire ou par intégration directe) que :

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 + C^{te}.$$

Or, on veut $E_{pe}(y = 0) = 0$, d'où $C^{te} = -\frac{1}{2}k\ell_0^2$. Ainsi, on a :

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k\ell_0^2.$$

4 b) On calcule d'abord la longueur ℓ du ressort en fonction de la coordonnée x . Un peu de trigonométrie donne $\cos(\beta) = \frac{x}{\ell}$, d'où $\ell = \frac{x}{\cos(\beta)}$. Par rapport à la coordonnée ℓ (mesurée le long de l'axe (OA)), l'énergie potentielle vaut donc :

$$E_{pe}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C^{te}.$$

On a donc :

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 + C^{te}.$$

On détermine alors la constante afin d'avoir $E_{pe}(A) = 0$. Lorsque le point M est en A, la longueur du ressort vaut $\ell(A) = \frac{L}{\sin(\beta)}$.

On résout donc :

$$E_{pe}(\ell(A)) = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2 + C^{te} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad C^{te} = -\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

Finalement, on trouve :

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

4 c) La masse centrale est soumise aux forces de rappel des deux ressorts :

- La longueur du ressort de gauche vaut x . La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F}_g = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$, d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,g} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.
- La longueur du ressort de droite vaut $2\ell_0 - x$. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F}_d = k(2\ell_0 - x - \ell_0)\vec{e}_x = k(\ell_0 - x)\vec{e}_x$ (attention au signe devant k qui doit être cohérent), d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,d} = \frac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2$.

En additionnant les deux contributions, et en demandant que $E_{pe}(\ell_0) = E_0$, on obtient alors $E_{pe}(x) = E_0 + k(x - \ell_0)^2$.

5 a) Déterminons le travail élémentaire. On a :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{h}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \cdot d\vec{OM}.$$

Or, par construction, les vecteurs vitesse et déplacement élémentaire sont colinéaires, d'où :

$$\delta W = -h dOM.$$

Par intégration, on a donc :

$$W = \int_{AB} -h dOM = -h \int_{AB} dOM = -h\ell.$$

Les autres cas se calculent semblablement.

5 e) Si la force était conservative, son travail ne dépendrait que des points de départ et d'arrivée, et serait donc nul sur un chemin fermé (points de départ et d'arrivée confondus). Ce n'est pas le cas pour les chemins c) et d), la force n'est donc pas conservative.

6 On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point d'arrêt. L'entraînement précédent permet d'affirmer que le travail de la force de frottement vaut $-hd$. On a donc :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -hd \quad \text{donc} \quad d = \frac{mv_0^2}{2h}.$$

7 a) La masse n'est soumise qu'au poids, force conservative, et à la tension du fil qui ne travaille pas car elle reste orthogonale au mouvement. L'énergie mécanique se conserve donc entre le point de départ et le point de rebroussement.

- Au départ, $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ (on pose $z = 0$ pour la position initiale de la masse, et on prend $E_p(0) = 0$).
- Au moment du rebroussement, $E_m = E_p = mgz(\theta_0) = mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$, car on a alors $z(\theta) = \ell - \ell \cos(\theta)$.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell(1 - \cos(\theta_0)) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}.$$

8 a) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre le début et la fin de la chute libre, on a :

$$E_m(t_{\text{fin chute}}) - E_m(t_{\text{début chute}}) = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(H - \ell_0).$$

Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée et on a donc :

$$v_0 = \sqrt{2g(H - \ell_0)} = \sqrt{2 \times 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times (2,0 \text{ m} - 0,30 \text{ m})} = 5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

8 b) La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives : son poids, ainsi que la force de rappel du ressort. On peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre la position d'arrivée sur le ressort ($z = \ell_0$) et la position d'altitude minimale ($z = z_m$), pour laquelle la vitesse s'annule. On a donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 = mgz_m + \frac{1}{2}k(z_m - \ell_0)^2.$$

Ainsi, après calcul, on trouve $\frac{1}{2}kz_m^2 + (mg - k\ell_0)z_m + \frac{1}{2}k\ell_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 = 0$.

On ne demande qu'une réponse numérique, on peut donc passer aux valeurs numériques pour simplifier la résolution :

$$500z_m^2 - 290,2z_m + 25,4 = 0.$$

Cette équation possède deux solutions, $z_1 \approx 0,47 \text{ m}$ et $z_2 \approx 0,11 \text{ m}$. La première solution correspond à une position supérieure en altitude à la position initiale, et n'est donc pas celle qui nous intéresse. On retient donc $z_m = 0,11 \text{ m}$.

8 c) La masse n'étant soumise qu'à des forces conservatives, elle revient en $x = \ell_0$ avec la même vitesse qu'elle avait en arrivant, à savoir v_0 . Elle atteint donc une altitude maximale quand sa vitesse s'annule en $z = H$.

9 a) On choisit un axe vertical descendant de manière à pouvoir identifier z à la distance OM, qui est la longueur du ressort.

Afin de déterminer l'équation différentielle, on souhaite appliquer le théorème de la puissance cinétique. Or :

- la puissance du poids vaut $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mg\dot{z}$ (axe descendant) ;
- la puissance de la force de rappel vaut $-k(z - \ell_0)\vec{e}_z \cdot \vec{v} = -k(z - \ell_0)\dot{z}$;
- la puissance de la force de frottements fluides vaut $-\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha\dot{z}^2$.

Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \right) = m\dot{z}\ddot{z} = mg\dot{z} - k(z - \ell_0)\dot{z} - \alpha\dot{z}^2.$$

D'où finalement : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$.

9 b) On détermine la position d'équilibre en projetant la première loi de Newton sur l'axe vertical descendant :

$$mg - k(z_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{donc} \quad z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

On obtient $z_{\text{eq}} > \ell_0$, ce qui est physiquement cohérent.

On pose donc $\zeta = z - z_{\text{eq}}$. En réinjectant dans l'équation différentielle obtenue précédemment, on obtient :

$$\ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m} \left(\zeta + \ell_0 + \frac{mg}{k} \right) = g + \frac{k\ell_0}{m} \quad \text{donc} \quad \ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0.$$

On peut également obtenir cette équation en écrivant la force de rappel par rapport à la variable ζ et en en déduisant l'énergie potentielle associée.

10 a) Au voisinage de $x = 0^+$, la fonction énergie potentielle est équivalente à β/x^2 . Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers $-\infty$ en 0, on a donc nécessairement $\beta < 0$.

Pour $x \rightarrow +\infty$, la fonction énergie potentielle est équivalente à α/x . Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers 0^+ en $+\infty$, on a donc nécessairement $\alpha > 0$.

Ce potentiel est physiquement impossible car $E_p(x \rightarrow 0^+) \rightarrow -\infty$: l'énergie potentielle n'est pas bornée inférieurement, on pourrait donc théoriquement utiliser ce potentiel pour extraire une quantité infinie d'énergie.

11 a) La position d'équilibre stable correspond à l'état qui minimise l'énergie potentielle.

- Déterminons le minimum de l'énergie potentielle $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$ en cherchant la valeur θ_{eq} telle que :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{eq}) > 0.$$

La première égalité donne $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{eq}) = mg\ell \sin(\theta_{eq}) = 0$ et donc $\theta_{eq} \equiv 0 [\pi]$.

Finalement, en tenant compte de $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{eq}) > 0$, on trouve $\theta_{eq} \equiv 0 [2\pi]$.

- On aurait pu remarquer que les minima de $mg\ell(1 - \cos(\theta))$ correspondent aux maxima de $\cos(\theta)$, qui sont bien les $\theta_{eq} \equiv 0 [2\pi]$.

11 b) On dérive l'énergie potentielle, en écrivant :

$$\frac{dE_p}{dz} = \kappa z + \lambda z^3.$$

L'équation $\frac{dE_p}{dz} = 0$ a alors trois solutions : $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{-\frac{\kappa}{\lambda}}$ et $z_3 = -\sqrt{-\frac{\kappa}{\lambda}}$.

Il s'agit des positions d'équilibre de ce potentiel.

On dérive une seconde fois afin d'étudier la stabilité. On a $\frac{d^2E_p}{dz^2} = \kappa + 3\lambda z^2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_1) &= \kappa > 0 \\ \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_2) &= \kappa + 3\lambda \left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0 \\ \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_3) &= \kappa + 3\lambda \left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0. \end{aligned}$$

Seule $z_1 = 0$ est une position d'équilibre stable.

11 c) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx} = 2U_0\beta x e^{\beta x^2},$$

qui montre que $\frac{dE_p}{dx}$ s'annule pour $x = 0$, qui est donc une position d'équilibre.

Pour étudier sa stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 2U_0\beta(1 + 2\beta x^2)e^{\beta x^2},$$

qui, en $x = 0$, vaut $2U_0\beta > 0$. Cette position d'équilibre est donc bien stable.

11 d) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{d\phi} = 2E_0 \sin(\phi - a) \cos(\phi - a).$$

Ainsi, $\frac{dE_p}{d\phi}$ s'annule pour $\phi = a$ et $\phi = a + \frac{\pi}{2}$, qui sont les positions d'équilibre dans l'intervalle $[0, \pi[$.

Afin d'étudier leur stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{d^2E_p}{d\phi^2} = 2E_0(\cos^2(\phi - a) - \sin^2(\phi - a)).$$

- On calcule ensuite $\frac{d^2E_p}{d\phi^2}(\phi = a) = 2E_0$. Ce dernier terme étant positif, la position d'équilibre $\phi = a$ est donc stable.
- Pour l'autre position d'équilibre, on a $\frac{d^2E_p}{d\phi^2}(\phi = a + \pi/2) = -2E_0$. Cette dérivée seconde étant négative, la position d'équilibre $\phi = a + \pi/2$ est instable.

13 d) Le mouvement entre x_2 et x_3 correspond à un état lié : c'est un mouvement dans un puits de potentiel. Comme le mouvement est à un degré de liberté, il est également périodique. Cependant, les positions extrêmes étant éloignées de la position moyenne (d'équilibre x_3^*), ce mouvement n'est pas harmonique.

.....

14 On a vu précédemment que les trajectoires correspondant à l'énergie mécanique E_3 sont des états de diffusion, le point matériel peut donc bien s'échapper à l'infini.

Le mouvement du point étant conservatif, on applique la conservation de l'énergie mécanique entre le départ et « l'arrivée » à l'infini. On a :

$$E_3 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad \text{donc} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2E_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2,3 \text{ kg}}} = 33,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

.....