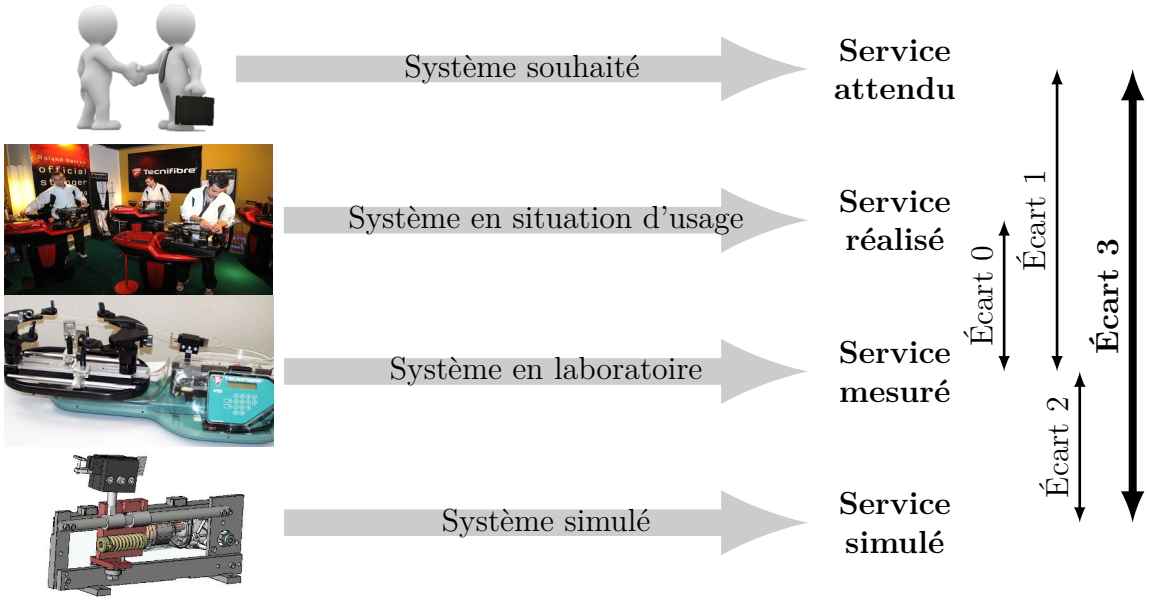
Modélisation et comportement des systèmes asservis

— Éléments de correction des TDs —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Broche de tour à commande numérique 3

Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des MPSI
https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin
— Version du 12 octobre 2026 —

— Exercice 1 —

Broche de tour à commande numérique

Question 1.1. Un système asservi est un système bouclé, générateur d'écart entre une grandeur de consigne et une mesure. Ici, aucune mesure n'est effectuée. La boucle de retour est simplement issue des équations modélisant le comportement du moteur à courant continu. Le système n'est donc pas un système asservi.

Question 1.2. Par lecture directe du schéma-blocs, il vient :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \left[(U_{\text{cons}}(p) - K_e\, \Omega_{\text{pièce}}(p)) \, \frac{K_c}{R} - C_u(p) \right] \frac{1}{Jp}$$

soit

$$\boxed{\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{K_c}{R\ J\ p + K_e\ K_c}\, U_{\text{cons}}(p) - \frac{R}{R\ J\ p + K_e\ K_c}\, C_u(p)}$$

Question 1.3. Sous forme canonique, l'expression précédente s'écrie

$$\boxed{\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\, p}\, U_{\text{cons}}(p) - \frac{\dfrac{R}{K_e\ K_c}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\, p}\, C_u(p)}$$

Essai à vide

Question 1.4. L'écart est défini comme la différence entre la tension de consigne $u_{\text{cons}}(t)$ et le retour de rétro-action $K_e \omega_{\text{pièce}}(t)$. On a alors :

$$\varepsilon(p) = U_{\text{cons}}(p) - K_e\, \Omega_{\text{pièce}}(p) = U_{\text{cons}}(p) \left(1 - \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\, p} \right)$$

soit :

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\, p} \right)}$$

Question 1.5. Par théorème de la valeur finale, on a

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\, p} \right)$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0}$$

Question 1.6. La réponse du système dans le domaine de Laplace est :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p} \cdot \frac{u_0}{p}$$

Par le théorème de la valeur initiale, on a :

$$\omega_{\text{pièce}}(0) = \lim_{p \to +\infty} p\Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p \to +\infty} p \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p} \frac{u_0}{p}$$

Finalement :

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(0) = 0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Par théorème de la valeur finale, on a :

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \lim_{p \to 0} p\Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p} \frac{u_0}{p}$$

d'où

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \frac{u_0}{K_e}}$$

Question 1.7. En notant $K = \dfrac{1}{K_e}$ et $\tau = \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}$, la réponse dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{K}{1 + \tau\ p} \cdot \frac{u_0}{p}$$

et correspond à la réponse d'un système du premier ordre à une entrée de type échelon d'amplitude u_0. Par cours, on donne sa réponse temporelle :

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(t) = K\ u_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t)}$$

Question 1.8. Avec les valeurs numériques :

- $K = \dfrac{1}{K_e} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$;
- $\tau = \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c} \approx 5 \times 10^{-3}\,\text{s}$

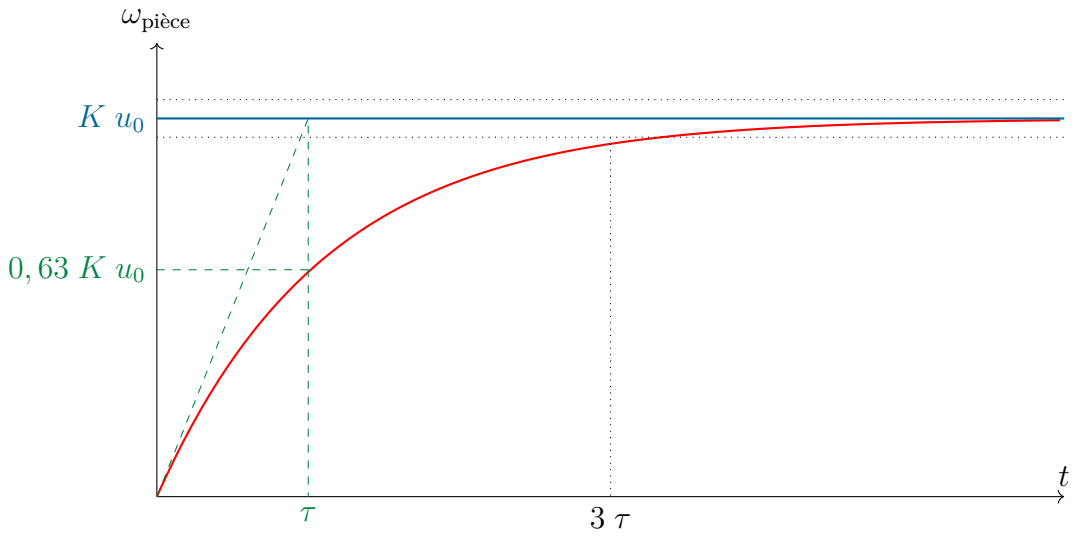
et sachant que le graphe de $\omega_{\text{pièce}}(t)$ possède :

- une asymptote horizontale en $Ku_0 \approx 16{,}7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
- une tangente initiale qui coupe l'asymptote en $t = \tau$;

et avec les 3 points caractéristiques :

— $\omega_{\text{pièce}}(\tau) = 0,63\ K\ u_0 \approx 10{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
— $\omega_{\text{pièce}}(3\tau) = 0,95\ K\ u_0 \approx 15{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
— $\omega_{\text{pièce}}(5\tau) = 0,99\ K\ u_0 \approx 16{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;

Question 1.9. Tracé de la réponse du moteur à une entrée échelon :



Question 1.10. La fonction de transfert étant du premier ordre, on a :

$$\boxed{T_{ru} = 3\ \tau \approx 15\,\text{ms}}$$

Essai en usinage

Question 1.11. Considérant $U_{\text{cons}}(t) = 0$, il vient

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = -\frac{\dfrac{R}{K_e\ K_c}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p}\ C_u(p) = -\frac{\dfrac{R}{K_e\ K_c}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p}\ \frac{C_{u0}}{p}$$

Par théorème de la valeur finale, on il vient :

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot \Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p\to 0} -p \cdot \frac{\dfrac{R}{K_e\ K_c}}{1 + \dfrac{R\ J}{K_e\ K_c}\ p} \cdot \frac{C_{u0}}{p}$$

Finalement :

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(\infty) = -\frac{R\ C_{u0}}{K_e\ K_c}}$$

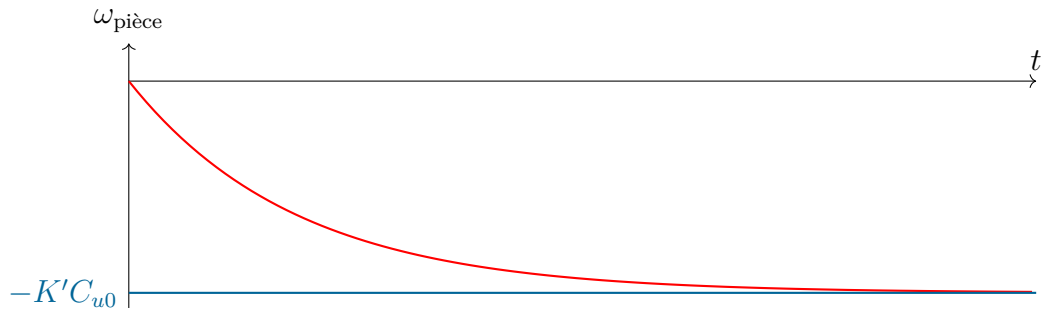
L'application numérique donne

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) \approx -0,56\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Question 1.12. La fonction de transfert $\dfrac{\Omega_{\text{pièce}}(p)}{C_u(p)}$ est une fonction du premier ordre, de gain $K' = \dfrac{R}{K_e\, K_c} \approx 0,056$ rad $\cdot$ s^{-1} $\cdot$ N^{-1} $\cdot$ m^{-1} et de même constante de temps τ. On reconnait donc la réponse à un échelon d'un système du premier ordre :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = -\frac{C_{u0}}{p} \cdot \frac{K'}{1+\tau\, p} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \boxed{\omega_{\text{pièce}}(t) = -K'\, C_{u0} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Question 1.13. Réponse du système à un échelon de perturbation.



Question 1.14. On constate ici la présence d'une erreur due à la perturbation. Pour annuler cette erreur, il est nécessaire de mettre en place un asservissement. Il est possible d'utiliser une génératrice tachymétrique pour acquérir une image de la vitesse.

Pour que cet asservissement soit robuste, il est nécessaire d'ajouter une action intégrale telle que la BO soit de classe 1, avec l'action intégrale en amont de la perturbation.