Calculs, géométrie et méthodes mathématiques pour les sciences physiques

Introduction dimension

0.1.
On donne les dimensions des grandeurs suivantes : $[F_G] = M.L.T^{-2}$ et $[\Omega] = T^{-2}$

- Donner l'unité de la constante de gravitation G à l'aide de la formule $\overrightarrow{F_G} = -G\,\frac{m_a m_b}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$.
- Vérifier alors l'homogénéité de l'expression suivante : $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\Omega^2}}$

0.2.
Faire les conversions suivantes :

- $1/8\ L$ en mL et en m^3
- $100\ cm^2$ en m^2
- $10\ g/L$ en kg/m^3

Oscillateur harmonique

1.1.
Donner les valeurs suivantes : sin (0), sin (π), sin $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et cos (0), cos (π), cos $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

1.2.
On donne $x(t) = 2cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = Acos(t) + Bsin(t) + C$.

- Déterminer A, B et C.

1.3.
Démontrer la formule suivante :

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

1.4.
Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2f(x) = 3$$

1.5.
Calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps pour les fonctions suivantes :

- $\cos(3t + 2)$
- $2\sin(2t) + 1$
- $\cos^2(3t)$

Propagation d'un signal

2.1.
Calculer les intégrales $\int_0^1 s(t)dt$ pour les fonction $s(t)$ suivantes :

- $s(t) = 4\cos(2\pi t + 1) + 2$
- $s(t) = (4\cos(2\pi t + 1) + 2)^2$
- $s(t) = 4(\sin(2\pi t + 1))^2\ + 2$

2.2.
Montrer que la valeur efficace $S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt}$ d'un signal sinusoïdal d'amplitude U et de valeur moyenne nulle est $S_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$.

2.3.
On étudie une onde modéliser par la fonction suivante : $s(x,t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \pi x + \frac{\pi}{3}\right)$

- Déterminer la célérité de l'onde.
- Tracer la fonction en $t = 0\ s$ et $t = 1\ s$. Vérifier le sens de propagation de l'onde.
- Déterminer le déphasage des signaux $s(x_1 = 0)$ et $s(x_2 = 2)$.

2.4.
Montrer les formules suivantes :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

2.5.
On donne $s_1(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$; $s_2(t) = 2\cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$ et $s_3(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t + \pi)$
Montrer rapidement par une méthode vectorielle l'égalité suivante : $s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) = 0$

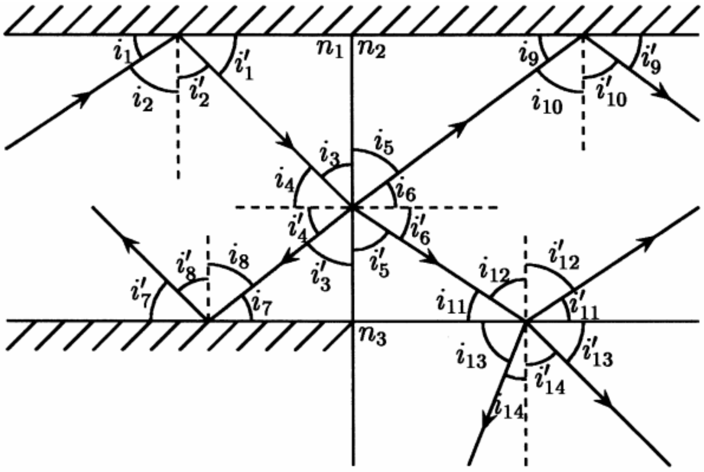
2.6.
L'éclairement en un point M de l'espace d'une onde $a(M,t) = A(M)\cos(\omega t - \varphi_M)$ est donnée par :

$$\varepsilon(M) = 2 < a^2(M,t) >$$

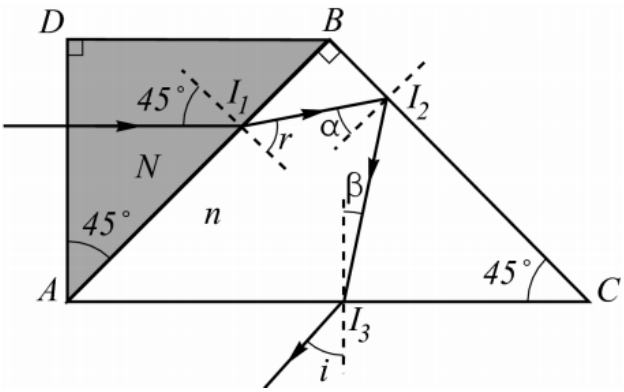
- Que vaut $\varepsilon(M)$?

Optique géométrique

3.1.
Sur le schéma ci-dessous, rayer les rayons lumineux n'existant pas réellement. Donner toutes les relations angulaires possibles en précisant pour chacune si elle est d'origine géométrique ou optique.

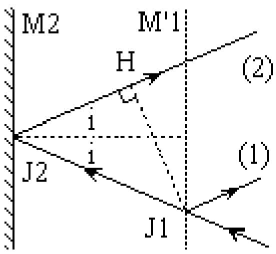


3.2.
On donne $N =$
Calculer les va



3.3.
Résoudre l'équation suivante : $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

3.4.
Déterminer la différence de marche définie ici par la longueur $\delta = J_1J_2 + J_2H$. On considère que le rayon incident fait un angle α avec la normale.



Introduction au monde quantique

4.1.

Montrer que $\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$ est solution de l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(\mathrm{x,t})}{dx^2} = E_n\Psi(\mathrm{x,t})$ dans le cas d'un puits infini entre $x = 0$ et $x = L$ avec $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

4.2.

Représenter la densité de probabilité $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ d'un électron dans un puit de potentiel pour les niveaux d'énergie $n = 1$ et $n = 2$.

Description d'un système et évolution vers un état final

5.1.

Equilibrer les réactions suivantes :

$$N_2(g) + \quad H_2(g) = \quad NH_3(g)$$
$$C_3H_8(g) + \quad O_2(g) = \quad CO_2(g) + \quad H_2O(l)$$
$$MnO_4^- + \quad H^+ + \quad Fe^{2+} = \quad Mn^{2+} + \quad H_2O + \quad Fe^{3+}$$

5.2.

On donne la réaction chimique suivante :

$$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6Fe^{2+} = 2Cr^{3+} + 7H_2O + 6Fe^{3+}$$

Peut se mettre sous la forme plus condensée :

$$\sum_i^{k+l} \nu_i B_i = 0$$

où ν_i est alors le coefficient stœchiométrique algébrique du constituant B_i tel que :

- $\nu_i > 0$ si B_i est un des l produit,
- $\nu_i < 0$ si B_i est un des k réactif.

- Donner les valeurs de k, l, B_2, ν_3, ν_5 et B_6.
- Donner l'expression de la constante de réaction $Q_{eq} = K°(T) = \prod_i {a_{i,eq}}^{\nu_i}$ en fonction de l'activité de chaque élément chimique.

Circuits électriques dans l'ARQS

6.1.

Résoudre les systèmes d'équations suivants : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

6.2.

Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} u_P = 5 - i_P \\ u_P = 20 i_P \end{cases}$

Évolution temporelle d’un système chimique et mécanismes réactionnels

7.1.

On donne les équations suivantes : $\frac{dx}{dt} = -k$; $\frac{dx}{dt} = -kx(t)$ et $\frac{dx}{dt} = -kx(t)^2$ avec $k > 0$.

- Résoudre les équations en fonction de $x(0)$.
- Tracer les courbes $x(t)$.
- Déterminer dans chacun des cas le temps t_1 tel que $x(t_1) = \frac{x(t=0)}{2}$.

Circuit linéaire du premier ordre

8.1.
Résoudre les équations suivantes :

- $\frac{df}{dx} + 3f(x) = 2$ avec $f(0) = 0$
- $\frac{dz}{dt} + kz(t) = a$ avec $z(0) = 1$

8.2.
Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^3 (1 - \exp(-t))^2 dt$ et $\int_0^\infty (1 - \exp(-t))^2 dt$
- $\int_{ti}^{tf} exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt$

8.3.
On étudie l' équation différentielle d'ordre 1 : $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = a$.

- Montrer que la solution peut s'écrire de façon générale :

$$x(t) = (x(0^+) - x(\infty))exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + x(\infty)$$

- Exprimer $x(\infty)$ en fonction des grandeurs de l'équation.

Oscillateurs amortis

9.1.

Résoudre l'équation suivante $\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + 3f(x) = 2$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

9.2.

On donne l'équation différentielle suivante issue du PFD : $m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z - l_0) - k\frac{dz}{dt}$

- Identifier les grandeurs λ, z_{eq} et ω_0 tel que l'on puisse écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\lambda\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}$$

9.3.

Réaliser l'analyse des fonctions suivante en fonction des valeurs de Q :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \text{ et } g(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}$$

Filtrage linéaire

10.1.
Identifier les grandeurs G_0, ω_0 et Q telle que ces deux fonctions de transfert soient identiques :

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC-LC\omega^2} \text{ et } \underline{H(j\omega)} = \frac{G_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

10.2.
Identifier les grandeurs f_c et H_0 telle que ces deux fonctions de transfert soient identiques :

$$\underline{H(jf)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\frac{R_1+R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{\underline{A_d}}} \text{ avec } \underline{A_d}(jf) = \frac{A_0}{1+j\frac{f}{f_0}} \text{ et } \underline{H(jf)} = \frac{H_0}{1+j\frac{f}{fc}}$$

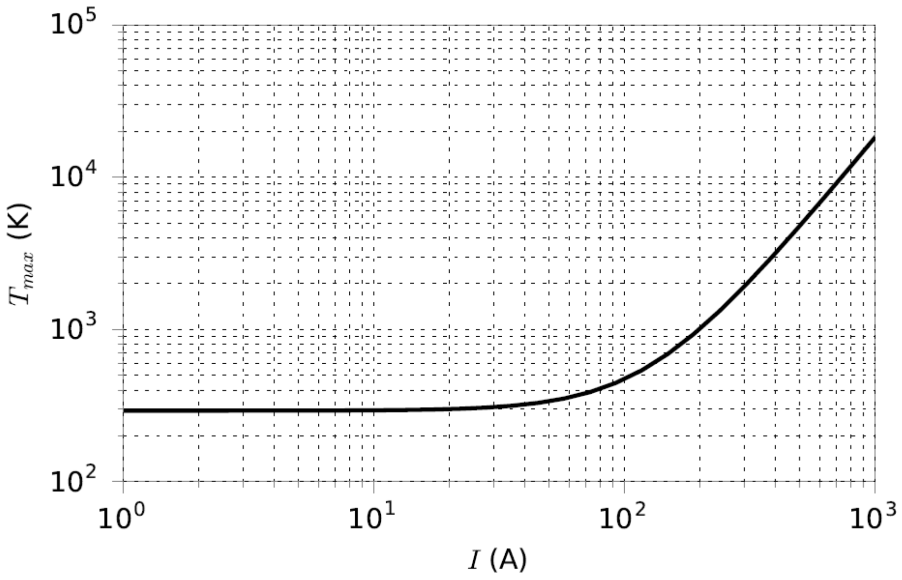
10.3.
Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes :

- $f(x) = 20\log\left(\frac{G_0}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}\right)$
- $g(x) = \arg\left(\frac{-x^2G_0}{1+\frac{jx}{Q}-x^2}\right)$
- $h(x) = 20\log\left(\frac{G_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}\right)$

10.4.
Tracer le diagramme semi-log asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H(p)} = \frac{H_0}{(1-\tau_1 p)(1-\tau_2 p)} \text{ où } \tau_1 < \tau_2$$

10.5.
On donne la courbe suivante :



- Donner l'expression $T_{max}(I)$ lorsque l'intensité tend vers l'infini.

Classification périodique

11.1.
On donne la relation donnant la longueur d'onde émise par un atome d'hydrogène en fonction des niveaux d'énergie de départ (p) et d'arrivée (n) :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \text{ avec } R_H = 1{,}097.107\ m^{-1}$$

D'un point de vue physique, on considère les états existés jusqu'à niveau $n = 6$.

- Déterminer le niveau p permettant une émission dans le visible.

11.2.
Pour un atome d'hydrogène, l'énergie de l'électron ne dépend que de n. Ainsi, les orbitales atomiques caractérisées par les triplets : (n, l, m_l) et (n, l', m_l') correspondent à un même niveau d'énergie. La dégénérescence d'un niveau d'énergie E_n est donc $d = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)$.

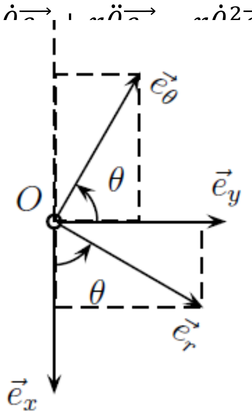
- Déterminer la dégénérescence d.

Description et paramétrage du mouvement d'un point

12.1.
Déterminer la norme des vecteurs suivants :

- $\ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$
- $\ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

12.2.



Donner l'expression des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{e_\theta}$ dans la base ($\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$)
- $\overrightarrow{e_x}$ dans la base ($\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}$)

12.3.
Réaliser les produits vectoriels suivants :

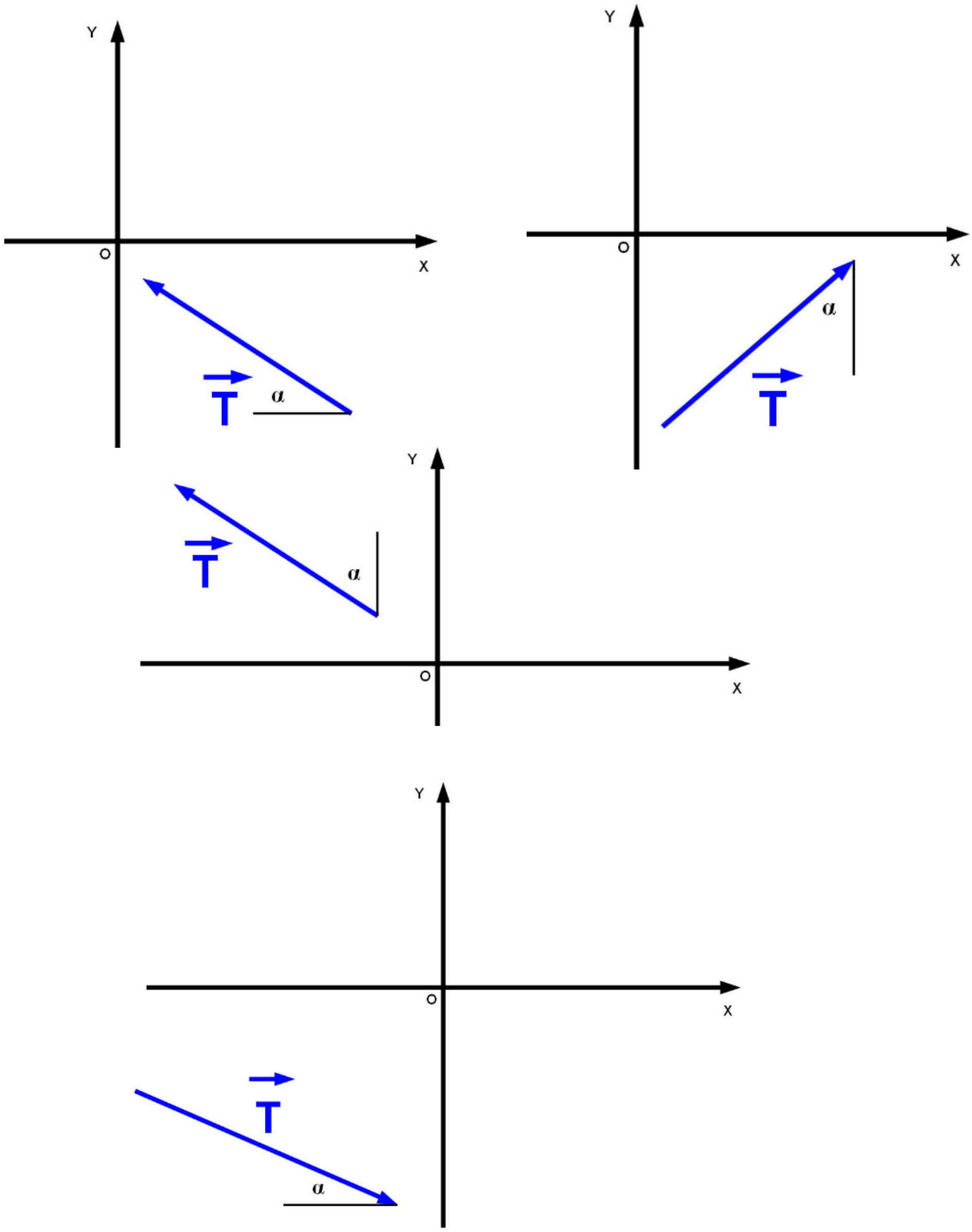
- $(3\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_z}) \times 2\overrightarrow{e_x} =$
- $(3\overrightarrow{e_r} + 2\overrightarrow{e_z}) \times 3\overrightarrow{e_\theta} =$
- $(3\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_z}) \times (2\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y}) =$
- $\left(\overrightarrow{e_x} \times (\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z})\right).\overrightarrow{e_x} =$
- $(4\overrightarrow{e_\theta} + 2\overrightarrow{e_z}) \times (-2\overrightarrow{e_\theta} - \overrightarrow{e_z}) =$

12.4.

- Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique.
- En dérivant $|\overrightarrow{e_r}|^2$, montrer que le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$.
- Montrer par un calcul explicite de dérivée que $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

Loi de la quantité de mouvement

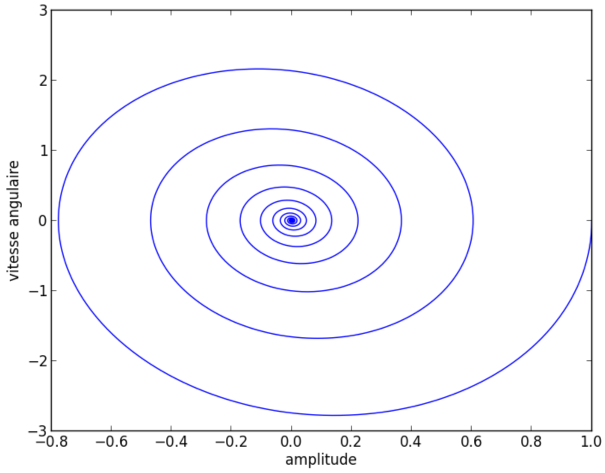
13.1.
Réaliser les projections suivantes :



Approche énergétique du mouvement

14.1.
Donner les primitives des fonctions suivantes : $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$ et $x - 3$

14.2.
Sur le portrait de phase déterminer la position et la vitesse initiale et finale. Déterminer la vitesse angulaire maximale.



Cristallographie

15.1.
Déterminer les aires des surfaces grises :