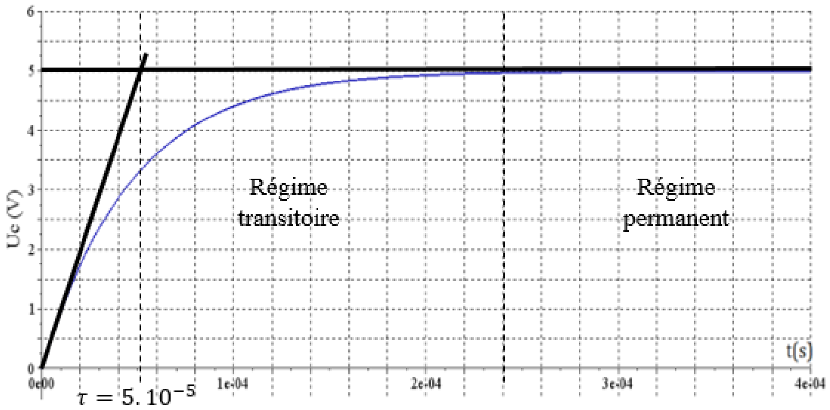
TD Circuits du 1er ordre - Correction

Exercice 1 : Étude d'un circuit RC (35, 39)

1. On attend $\tau = RC = 2{,}35.10^{-5}s$
2. 

3. Le GBF n'est pas parfait, il a une résistance en série R_g tel que $(R_g + R)C = 5.10^{-5}$ alors $R_g = 56\Omega$.

Exercice 2 : Circuit avec deux sources (36, 37, 38)

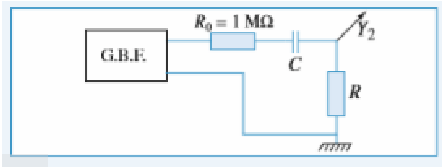
1. a. L'interrupteur ouvert impose $i_2(0^-) = 0$.
La loi des nœuds conduit à $i_1(0^-) = i(0^-)$.
Le régime continu étant établi depuis suffisamment longtemps pour $t < 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'où $i_1(0^-) = i(0^-) = 0$.
Le condensateur ayant été chargé sous la tension continue E_1, on en déduit que $u_C(0^-) = E_1$.
b. Comme la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_1$.
La loi des mailles dans la première branche ($E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à $i_1(0^+) = 0$.
La loi des mailles dans la seconde branche $(E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0)$ conduit à : $i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}$
La loi des nœuds conduit à : $i\,(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}$
c. Lorsque $t = \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $i(\infty) = 0$.
Alors $i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$.
Et la loi des nœuds donne $u_C(\infty) = E_1 - R_1 i_1(\infty) = E_1 - R_1 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 E_2 - R_2 E_1}{R_1 + R_2}$
2. La loi des mailles dans le circuit donne $u_C(t) = E_1 - R_1 i_1(t) = E_2 - R_2 i_2(t)$ alors on a $i_2(t) = \frac{E_1 - R_1 i_1(t) - E_2}{R_2} = i(t) - i_1(t)$ donc $i(t) = \frac{E_1 - R_1 i_1(t) + R_2 i_1(t) - E_2}{R_2}$ alors on trouve $i_1(t) = \frac{R_2 i(t) + E_2 - E_1}{-R_1 + R_2}$.
Donc $u_C(t) = E_1 - R_1 \frac{R_2 i(t) + E_2 - E_1}{-R_1 + R_2}$.
$\frac{E}{RC} = \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} \Leftrightarrow \frac{E}{\tau} = \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau}$ avec $E = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2}$ et $R = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$
3. On résout l'équation différentielle : $u_C(t) = Aexp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$
Avec les conditions initiales on a $A = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} = u_C(0^+) - u_C(\infty)$
4. On a $u_C(t) = (u_C(0^+) - u_C(\infty))exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)$
Toutes les grandeurs électriques de ce circuit d'ordre 1 évoluent de la même manière, c'est-à-dire suivant la loi temporelle :
$$x(t) = (x(0^+) - x(\infty))exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + x(\infty)$$
Avec la question 1 on trouve : $i_1(t) = (\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2})(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right))$, $i_2(t) = \left(\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\right) + \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ et $i(t) = \left(\frac{E_2 - E_1}{R_2}\right) exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Exercice 3 : Double condensateur (28, 29, 38, 42)

1. Les deux condensateurs sont orientés en convention récepteur : $i = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}$
   La loi des mailles donne $u_{C1} + u_{C2} + Ri = 0$. On dérive l'équation et on obtient alors $i\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + R\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$ alors $i(t) = Aexp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
   La loi de mailles à $t = 0^+$ donne donc $u_{C1}(0^+) + u_{C2}(0^+) + Ri(0^+) = 0$ alors $i(0^+) = A = -\frac{Q_0}{RC_1}$.
2. Les conventions récepteurs des condensateurs entraînent : $i = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$. Alors $Q_1(t) = \frac{Q_0\tau}{RC_1} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + cst_1$ et $Q_2(t) = \frac{Q_0\tau}{RC_1} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + cst_2$
3. La puissance reçue par un condensateur est $P = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)$, d'où l'énergie reçue pendant l'intervalle de temps dt : $dW = P.dt$. Pour avoir l'énergie totale reçue, on intègre dW entre $t_i = 0$ et t_f alors $W_1 = \int_{ti}^{tf} \frac{d}{dt}\frac{{Q_1}^2}{2C_1} dt = \left[\frac{{Q_1}^2}{2C_1}\right] = \frac{1}{2C_1}\left({Q_1}^2(t_f) - {Q_1}^2(0)\right)$ et $W_2 = \frac{1}{2C_2}\left({Q_2}^2(t_f)\right)$
4. L'énergie reçue par la résistance pendant dt est $dW = Ri^2\,dt$, d'où l'énergie reçue entre $t_i = 0$ et t quelconque : $W_R = \int_{ti}^{tf} Ri^2 dt = \frac{{Q_0}^2}{R{C_1}^2} \int exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{{Q_0}^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}\left(exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) - 1\right)$

Exercice 4 : Oscilloscope en mode « AC » (40)

Les deux entrées de l'oscilloscope sont attaquées par un échelon de tension d'amplitude $7V$. La réponse de l'entrée Y_1 est «instantanée», alors que celle de l'entrée Y_2 ne l'est pas. Le signal mesuré revient exponentiellement à sa valeur initiale après avoir eu une discontinuité de $7V$. Ce résultat est compatible avec le document 1 donné des entrées.
Pour Y_1, l'influence de la résistance R est nulle car l'impédance de sortie du GBF est négligeable.
Pour Y_2, un signal créneau attaque un circuit RC.
La valeur de la constante de temps peut être mesurée à partir du temps de demi-décroissance $t_{1/2} = RC\ ln\ 2$. Ici $t_{1/2} \approx 0{,}05s$ soit $RC \approx 70\ ms$.
L'entrée Y_1 n'est pas modifiée par rapport à la première mesure. Pour l'entrée Y_2, on a le schéma équivalent :



Le signal Y_2 présente un pic de tension d'amplitude légèrement inférieure à $4V$ avec une décroissance exponentielle de temps de demi-décroissance $t_{1/2} \approx 0{,}1s$. L'amplitude permet de calculer R, par un pont diviseur : $E_0 = 7V$ et $\frac{R}{R+R_0} = \frac{4}{7}$ alors $R = 1{,}3M\Omega$
Le nouveau temps de décroissance permet d'obtenir : $(R + R_0)C \approx 140\ ms$.
Combiné avec la valeur RC obtenue à la première mesure, ceci donne : $R \approx R_0 = 1M\Omega$ et $C = 0{,}14\ \mu F$.
Vu la précision des mesures, les deux valeurs de R sont bien compatibles.