TD Oscillateurs amortis - Correction

Exercice 1 : Étude d'un flash (45, 47, 48, 49, 50, 54)

1. Au bout d'un temps très long, le condensateur est chargé et l'intensité est nulle. La tension u_C aux bornes de C est égale à E et $u_L = 0$.
2. Les deux grandeurs continues sont : la tension aux bornes de C, soit $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ et l'intensité traversant L, soit $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Une loi des mailles à $t = 0^+$ donne : $E = R_i i + u_C + u_L \Rightarrow u_L(0^+) = E$.
3. Avec la loi des mailles que l'on dérive 2 fois on a $0 = \frac{R_i}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC}u_L + \frac{d^2u_L}{dt^2}$. On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_i}{L}$ alors $Q = \frac{L}{R_i}\frac{1}{\sqrt{LC}}$.
4. En considérant $R_i = 0$ on a $Q = \infty$. La réponse est celle d'un OH.
5. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'équation devient une équation d'oscillateur harmonique $0 = \frac{1}{LC}u_L + \frac{d^2u_L}{dt^2}$, dont la solution est : $u_L(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$. Sachant qu'à $t = 0^+$, $u_L = E$ on déduit $A = E$. L'autre condition initiale pour $\frac{du_L}{dt}(0^+)$. On repart de la loi des mailles (avec $R_i = 0$) que l'on dérive, et on calcule l'expression à $t = 0^+$. On trouve $\frac{du_L}{dt}(0^+) = 0$. On en déduit $B = 0$.
   Alors $u_L(t) = Ecos(\omega_0 t)$.
6. On ne néglige plus R_i, il apparait alors une dissipation par effet Joule. L'énergie totale du système va donc diminuer. u_L tend vers 0.
7. On a $Q = 26822$. Le facteur de qualité est supérieur à ½ le régime est pseudo-périodique.
8. Le régime est donc pseudopériodique de temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 2\frac{L}{R_i} = 0{,}14\ s$.
9. L'équation caractéristique et son discriminant sont $r^2 + \frac{R_i}{L}r + \frac{1}{LC} = r^2 + 13{,}9r + 1{,}39.10^{11} = 0$ et $\Delta = \left(\frac{R_i}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = -5.10^{11}s^{-2}$
   $$u_L = exp(-6{,}95t)\big(Acos(372827\text{t}) + Bsin(372827\text{t})\big)$$
10. En effectuant une loi des mailles que l'on multiplie par l'intensité on arrive a
   $$P_{fournie\ géné} = P_{Joule} + P_{stockée\ bobine} + P_{stockée\ condensateur}$$

Exercice 2 : Etude graphique (44, 46, 51)

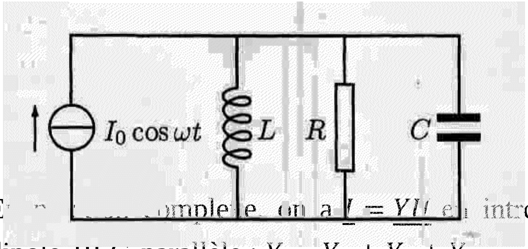
Amplitude crête-à-crête : $1{,}6 - 0{,}6 = 2{,}2\ V$. Amplitude : $S_m = 1{,}1\ V$.
Valeur moyenne : $< s >= S_0 = 0{,}5\ V$.
Période : on prend plusieurs périodes pour avoir la plus grande précision possible : $(4{,}15 - (-4{,}4))/6 = 1{,}43\ s$ donc $f = 0{,}70\ Hz$.
Phase à l'origine : sinus est maximum en $\frac{\pi}{2}$ donc $2\pi f t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ en $t = 0{,}2\ s$ donc $\varphi = 0.88\ rad$.
Donc $s(t) = S_0 + S_m cos(2\pi f t + \varphi)$

Le régime est pseudopériodique (sinusoïdal amorti).
La pseudo-période est $T = 6{,}3.10^{-5}s$. On en déduit la pseudo-pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 100000\ rad.s^{-1}$.
On observe des oscillations peu amorties donc $Q \gg 1$ alors $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_0$
On mesure $\tau = 4{,}2.10^{-4}s$. Alors $Q = 21$, on peut vérifier que Q correspond environ aux nombres d'oscillations.
Or $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ alors $L = 4{,}2.10^{-3}H$ et $C = 2{,}4.10^{-8}H$.

Exercice 3 : Ressort vertical (43)

On cherche la position d'équilibre $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$.
On trouve alors $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $x = l - l_{eq}$.

Exercice 4 : Facteur de qualité (55, 56, 57)

1. 

2. En notation complexe, on a $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$ en introduisant l'impédance du dipole RLC parallèle : $\underline{Y} = \underline{Y_R} + \underline{Y_C} + \underline{Y_L} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$ d'où $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R}+j(C\omega-\frac{1}{L\omega})}$
3. $U_m = |\underline{U}| = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2}}$ maximale pour $(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2$ minimum soit pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
4. On constate que $\lim\limits_{\omega\to 0} U_m = \lim\limits_{\omega\to\infty} U_m = 0$
   Pour $\omega = \omega_0$, $U_m = U_m(\max) = RI$
   Les pulsations de coupures ω_1 et ω_2 vérifient : $\frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2}} = \frac{RI}{\sqrt{2}}$.
   Soit $LC\omega^2 \pm \frac{L}{R}\omega - 1 + 0$.
   Donc $\omega_{1/2} = \frac{1}{2RC}(\pm 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2C}{L}})$ car $\sqrt{1 + \frac{4R^2C}{L}} > 1$
5. La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$ d'où $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$. On a donc relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.
6. La puissance électrique moyenne $P = \frac{1}{2}\frac{RI_0{}^2}{1+R^2(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2}$ on a alors $P_{max} = \frac{1}{2}RI_0^2 = RI_{eff}{}^2$
7. $P_{max} = P \Leftrightarrow C\omega = \frac{1}{L\omega}$ alors $\omega = \omega_0$
8. $P = \frac{Pmax}{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}$
9. $\frac{P_{max}}{2} = P \Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$ et on retrouve la bande passante. La bande passante correspond aux pulsations pour lesquelles la puissance est supérieure à $\frac{P_{max}}{2}$.

Exercice 5 : Relevé expérimental (58, 59)

1. La résonance est aigue, le facteur de qualité est important.
2. La fréquence d'accord du récepteur est $f_r \approx f_0 = 160\ Hz$ on en déduit $C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2} = 5{,}9\ nF$.
3. On mesure $\frac{V_{fm}(max)}{E_m} = Q = 18$ à la résonnance en supposant que $4Q^2 \gg 1$. On a $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 9\ kHz$. On doit diminuer la résistance R.
4. Avec la formule $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ on trouve $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = 9{,}4\ \Omega$.
5. Le circuit est juste assez sélectif.