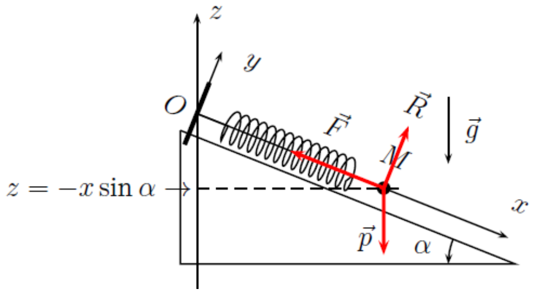
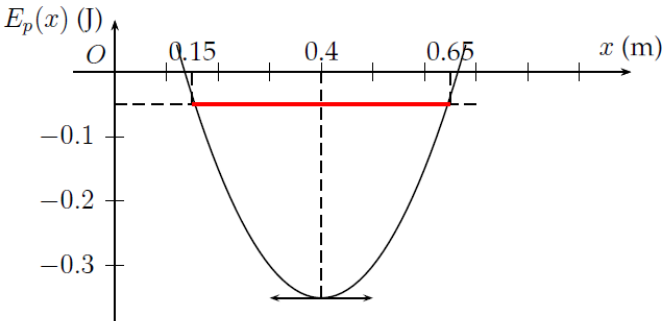
TD Approche énergétique du mouvement - Correction

Exercice 1 : Masse + ressort (117, 120)

1. Pour déterminer l'énergie potentielle E_p du point matériel M, il faut faire le bilan des forces qui lui sont appliquées, déterminer celles qui sont conservatives puis exprimer $E_p(x)$ où x est le paramètre.



Bilan des forces :
• Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$ dérive de l'énergie potentielle $E_{p,pes}(z) = \pm mgz + cst = mgz$ avec $z = -xsin(\alpha)$ d'après la figure ci-dessous.
• La réaction du support $\vec{R} = \vec{N}$ car pas de frottements, normale au déplacement. $\vec{N}$ ne dérive d'aucune énergie potentielle mais ne travaille pas.
• La force de rappel du ressort qui dérive de $E_{p,ela}(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$
On en déduit $E_p(x) = -mgxsin(\alpha) + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$
Alors $E_p(x) = 5(x - 0{,}3)^2 - x$



2. Comme le travail des forces non conservatives est nul, on a conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = 0$. Or $E_m = E_c + E_p(x)$ avec $E_c \geq 0$ d'où $E_p(x) \leq E_m$ pour tout x ce qui nous permet d'effectuer une discussion graphique.
À l'aide des conditions initiales, on calcule $E_m = cst = E_m(0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x_0 - l_0)^2 - mgx_0\sin(\alpha) = -0{,}05\ J$. On remarque sur le graphe que pour $E_m = -0{,}05\ J$, la condition $E_p(x) \leq E_m$ n'est vérifiée que pour $15\ cm \leq x \leq 65\ cm$: oscillations entre ces deux valeurs extrêmes, état lié.
3. Si on considère des frottements, l'énergie mécanique du système va diminuer (conversion de l'énergie mécanique en énergie thermique) jusqu'à l'immobilisation au fond du puits de potentiel (position d'équilibre stable quand $E_c = 0$), c'est à dire en $x = 40\ cm$.

Exercice 2 : Igloo (115, 116, 122)

1. Pour déterminer la relation qui lie la vitesse v de M au paramètre θ, on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou celui de l'énergie mécanique.
Les forces appliquées à M sont :
• Son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,pes}(z) = \pm mgz + cst = +mgz$ ici si on la considère nulle en $z = 0$.
• La réaction de S, $\vec{R} = \vec{N}$ normale au déplacement, non conservative mais ne travaille pas.
Le théorème de l'énergie mécanique implique $\Delta E_m = W_{nc} = 0$ le travail des forces non conservatives.
On a donc à tout instant $E_m = cst$ et en particulier entre l'instant initial $(v_0 = 0, z_0 = R)$ et un instant t quelconque $(v, z = Rcos(\theta))$. Alors $v = \sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))}$
2. Le produit scalaire $\vec{P}.\vec{v} > 0$ dans ce cas, le poids est donc moteur.
3. Comme le travail de $\vec{N}$ est nul, on ne peut plus utiliser de méthode énergétique. Vu le type de mouvement, on travaille maintenant dans la

base polaire. Par application du principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{N}$ avec $\vec{a}$ l'accélération de M.

Dans la base polaire $\vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}$, $\vec{N} = N\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{p} = -mgcos(\theta)\overrightarrow{e_r} + mgsin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$.

On projette le PFD sur $\overrightarrow{e_r}$, on a alors $-m\frac{v^2}{R} = N - mgcos(\theta)$ alors $N = mgcos(\theta) - 2mg(1 - \cos(\theta)) = mg(3cos(\theta) - 2)$

4. On considère qu'il n'y a plus de contact entre S et M lorsque N s'annule, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_0$ tel que $0 = mg(3\cos(\theta_0) - 2)$ alors $co\,s(\theta_0) = \frac{2}{3}$ alors $\theta_0 = 48°$.
5. M suit ensuite une trajectoire parabolique (chute libre)

Exercice 3 : Bifurcation (121, 123, 125, 126)

Pour déterminer l'énergie potentielle de M, on commence par faire l'inventaire des forces qui lui sont appliquées.

• Son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,pes} = \pm mgz + cst = +mgz$ ici. Mais le déplacement est vertical alors $E_{p,pes} = 0$.

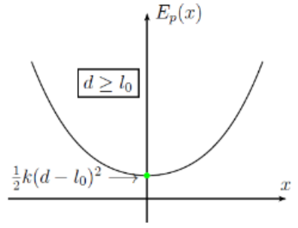
• La force de rappel élastique $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,ela} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec ici d'après le théorème de Pythagore $l = \sqrt{d^2 + x^2}$.

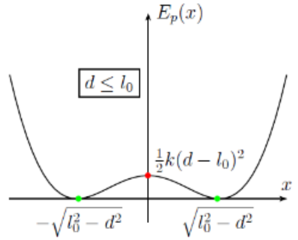
• La réaction de l'axe Ox sur M. C'est une force non conservative mais comme l'énoncé précise qu'il n'y a pas de frottement, $\vec{R} = \vec{N}$ est normale au déplacement et ne travaille pas.

Finalement $E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$

Si $d \geq l_0$ $E_p(x)$ ne s'annule jamais et atteint son minimum en $x = 0$.

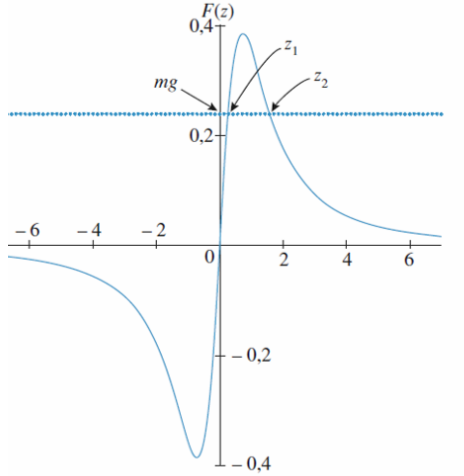
Si $d < l_0$ $E_p(x)$ s'annule en $x = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$.





Exercice 4 : Particule chargée (118, 119, 124, 127)

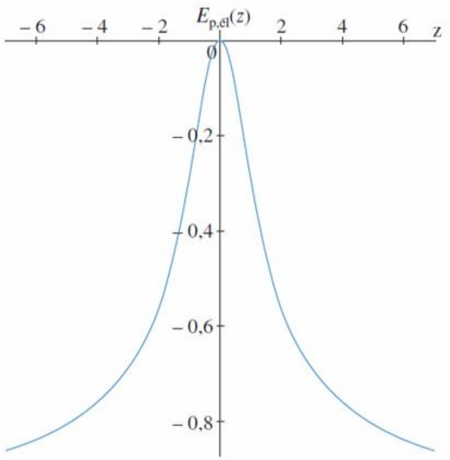
1. On a $\vec{F}(z) = \alpha q\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\overrightarrow{e_z}$

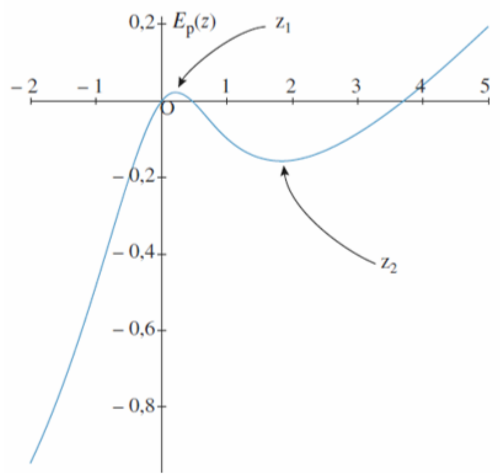


2. L'équilibre peut être réalisé si la force $F(z)$ peut être compensée par l'effet du poids. On voit que la condition $mg = \alpha q\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ peut être réalisée pour deux positions d'équilibre z_1 et z_2, à condition que la masse m soit inférieure à $m_{max} = \frac{|\vec{F}(z)|_{max}}{g}$. La valeur maximale de $F(z)$ est obtenue pour $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$.
   La condition d'existence des deux équilibres est donc : $m < m_{max} = \frac{2\alpha q}{(3)^{3/2}gR^2}$
3. A. L'énergie potentielle $E_{p,él}(z)$ associée aux efforts électrostatiques est donnée par $\frac{dE_{p,él}}{dz} = -F(z) = -\alpha q\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ soit $E_{p,él}(z) = \alpha q\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} + cst$ en prenant la constante de façon à avoir $E_{p,él}(0) = 0$, on obtient les variations suivantes, où on observe naturellement l'effet répulsif du cerceau sur la petite sphère (les deux portent des charges de même signe) : la force électrique est orientée dans le sens

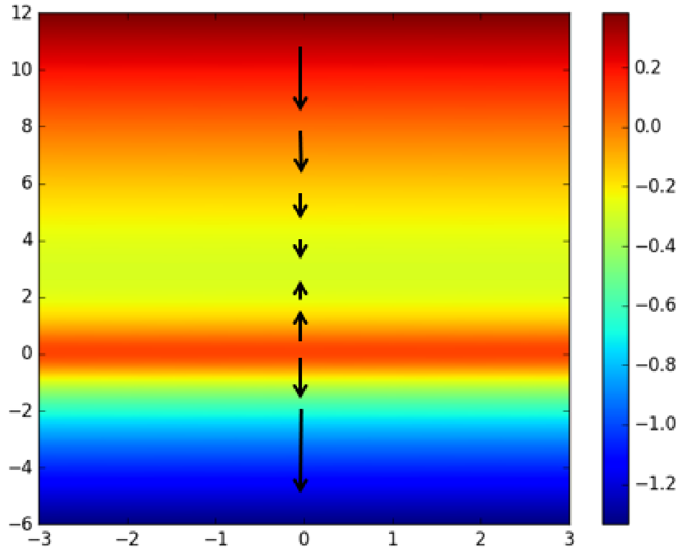
décroissant de l'énergie potentielle, et tend à éloigner la sphère du point O.
En ajoutant l'énergie potentielle de pesanteur, l'origine de l'énergie potentielle étant prise en $z = 0$, il vient $E_p(z) = \alpha q \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} + mgz - \frac{\alpha q}{R}$.
On retrouve les positions d'équilibre z_1 et z_2 rendant l'énergie potentielle stationnaire :

- en z_1 l'énergie potentielle passe par un maximum (local) : l'équilibre est instable,
- en z_2 l'énergie potentielle passe par un minimum (local) : l'équilibre est stable.

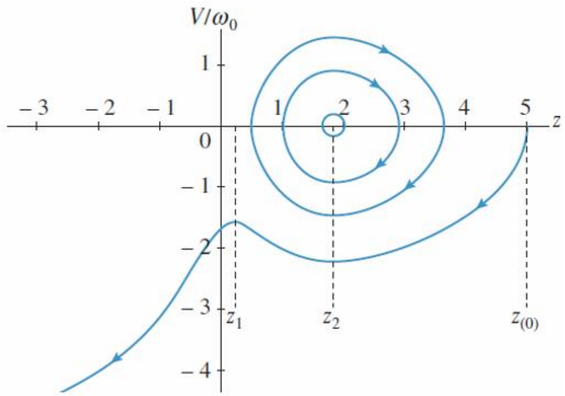




4.



5. Au voisinage de $z_e = z_2$, notons $z = z_2 + \varepsilon$ et tentons une linéarisation de l'équation du mouvement $m\frac{d^2z}{dt^2} = F(z_e + \varepsilon) - mg = (F(z_e) - mg) + \varepsilon\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_2} + \cdots$ où le terme d'ordre 0 est nul par définition de l'équilibre. On obtient une équation d'oscillateur harmonique $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -{\omega_0}^2\varepsilon$ où la pulsation est $\omega_0 = \sqrt{-\frac{1}{m}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_e=z_2}} = \sqrt{\alpha q \frac{2z_e^2 - R^2}{m(R^2+{z_e}^2)^{5/2}}}$
6. Pour les trajectoires de phases fermées, qui correspondent à des mouvements périodiques, les conditions initiales sont sans importance. Pour la trajectoire non fermée, qui part sur l'axe (Oz) du plan de phase, la petite sphère a été lâchée sans vitesse initiale.
Le sens d'évolution s'obtient sachant que z augmente lorsque le point de phase est au-dessous de (Oz) car la vitesse est négative, et que z diminue si le point est au-dessus de (Oz).



7. Les trajectoires fermées correspondent à des oscillations autour de la position d'équilibre stable $z = z_2$. Notons que la plus petite trajectoire correspond pratiquement à un cercle : l'approximation linéaire, donnant des oscillations harmoniques, est ici satisfaisante.
   Pour la trajectoire non bouclée, l'énergie mécanique est suffisante pour passer la bosse d'énergie potentielle en $z = z_1$. Dans un premier temps, z varie de $z(0)$ à z_2; l'énergie potentielle diminue et l'énergie cinétique augmente : la trajectoire s'éloigne de (Oz). Pour z diminuant de z_2 à z_1, l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue : la trajectoire revient vers l'axe (Oz), mais ne le touche pas : la petite sphère n'atteint pas l'abscisse z_1 avec une vitesse non nulle. Au-delà, elle poursuit sa chute en accélérant.