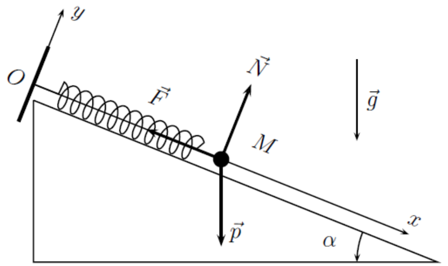
TD Lois de Newton - Correction

Exercice 1 : Ressort (106, 107)

1. On fait un bilan des forces :



On se place à l'équilibre alors $\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}=\vec{0}$. On projette cette équation suivant l'axe Ox car la réaction du support est inconnue. On a donc $k\left(l_{eq}-l_0\right)=mgsin(\alpha)$ soit $l_{eq}=l_0+\frac{mgsin(\alpha)}{k}$.

2. Pour déterminer la loi horaire on utilise le PFD $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}$ que l'on projette $\begin{cases} m\ddot{x}=-k(x-l_0)+mgsin(\alpha) \\ m\ddot{y}=-mgcos(\alpha)+N \end{cases}$

La première équation donne $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}l_{eq}$

La solution est $x(t)=Acos(\omega_0 t)+Bsin(\omega_0 t)+l_{eq}$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Les conditions initiales donnent $x(t)=d.cos(\omega_0 t)+l_{eq}$.

On retrouve donc bien un mouvement rectiligne sinusoïdal.

Exercice 2 : Chute dans une piscine (109, 110, 111)

1. On montre que $z(t)=\frac{gt^2}{2}$. On a $t_c=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ donc la vitesse d'entrée est $\dot{z}(t_c)=g\sqrt{\frac{2h}{g}}$. On a $\overrightarrow{v_e}=\sqrt{2gh}\overrightarrow{u_z}$. Donc $v_e=14{,}1\ m.s^{-1}$.

2. On applique le PFD au baigneur : $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{\Pi}+\overrightarrow{f_f}$. On projette cette équation sur l'axe Oz donc $m\dot{v_z}=mg-\frac{m}{d_h}g-kv_z$. Donc $\dot{v_z}+\frac{k}{m}v_z=g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)$ on identifie alors $\beta=\left(1-\frac{1}{d_h}\right)$ sans unité et $\tau=\frac{m}{k}$ en s^{-1}.

3. On a $v_z(t)=\tau g\beta\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)+v_e\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

4. Le baigneur atteint une vitesse limite $v_L=\tau g\beta=\frac{m}{k}g\left(1-\frac{1}{d_h}\right)=-0{,}356\ m.s^{-1}$. La vitesse limite est négative à cause de la poussée d'Archimède.

5. On a $v_z(t_1)=v_L+(v_e-v_L)\ \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)=0$ alors $t_1=-\tau\ln\left(\frac{v_L}{v_L-v_e}\right)=1{,}19\ s$.

6. On intègre et on a $z(t)=v_L t+(v_L-v_e)\tau\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$. Alors $z(t_1)=4{,}1\ m$.

Exercice 3 : Autour du pendule (106, 107, 113, 114)

1. On considère le système $\{M\}$ à l'équilibre dans le référentiel R galiléen. D'après la première loi de Newton (ou principe d'inertie), la somme vectorielle des forces appliquées au système est nulle. Dans le triangle rectangle représenté en pointillés sur la figure, on peut lire $\tan(\theta_0)=\frac{F}{p}$ avec $F=k(d-d_0)>0$ et $p=mg$ d'où $\tan(\theta_0)=\frac{k(d-d_0)}{mg}$ soit $m=\frac{k(d-d_0)}{\tan(\theta_0)g}$

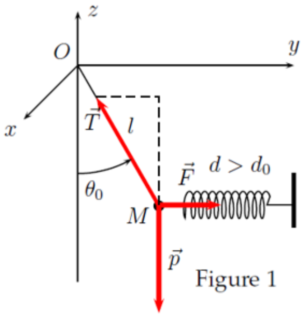


Figure 1

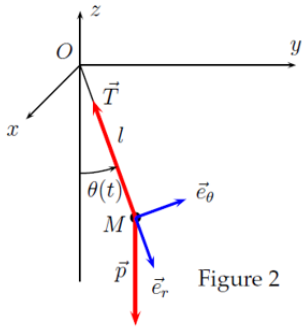


Figure 2

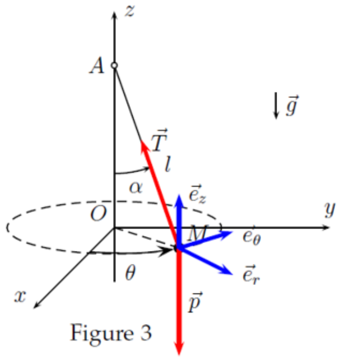


Figure 3

2. On applique le PFD alors $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$. Dans la base polaire on a $\vec{a} = l\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta} - l\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{e_r}$. De plus on a $\vec{T} = -T\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{p} = mgcos(\theta)\overrightarrow{e_r} - mgsin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$. On projette sur $\overrightarrow{e_\theta}$ et $ml\ddot{\theta} = -mgsin(\theta)$ soit l'équation de $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin(\theta) = 0$
3. Pour des petites oscillations on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. Les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ implique $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$
4. Pour trouver la tension on projette le PFD sur $\overrightarrow{e_r}$. Alors on a $-ml\dot{\theta}^2 = -T + mgcos(\theta) \approx -T + mg(1 - \frac{\theta^2}{2})$. Avec l'expression de $\theta(t)$ on trouve $\dot{\theta}^2 = \left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right)^2 = \frac{g}{l}\theta_0^2\left(1 - \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right)$ ce qui implique que $T = \frac{mlg\theta_0^2}{l}\left(1 - \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right) + mg\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right) = mg\left(1 - \theta_0^2\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right)\right)$
5. On a toujours $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$ mais on travaille dans la base cylindrique avec $r = OM = lsin(\alpha)$ et $\vec{a} = r\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{e_r}$. On projette sur l'axe $\overrightarrow{e_r}$ et on a $-mr\dot{\theta}^2 = -mlsin(\alpha)\omega^2 = -Tsin(\alpha)$ alors $T = ml\omega^2$.

On projette sur $\overrightarrow{e_z}$ et on a $0 = -mg + Tcos(\alpha)$ soit $cos(\alpha) = \frac{mg}{T} = \frac{g}{l\omega^2}$ il faut donc que $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ ou $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Exercice 4 : Masses liées en rotation (103, 104, 105)

1. On applique le PFD sur M_2 : $-mL\omega^2\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{T_2}$
   Le principe d'action réaction impose que $\overrightarrow{T_{2/1}} = -\overrightarrow{T_2}$
   Le PFD sur M_1 : $-\frac{mL}{2}\omega^2\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_{2/1}}$ alors $\overrightarrow{T_1} = -\frac{3}{2}mL\omega^2\overrightarrow{e_r}$
2. La somme des forces extérieures au système est nulle alors le centre de gravité est en mouvement rectiligne uniforme. Un référentiel en MRU dans un référentiel galiléen est galiléen.
3. On a $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$ dans le référentiel lié au centre de masse. Donc $\overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_2}$ dans ce référentiel. Le système est en rotation autour de G à la vitesse angulaire ω.