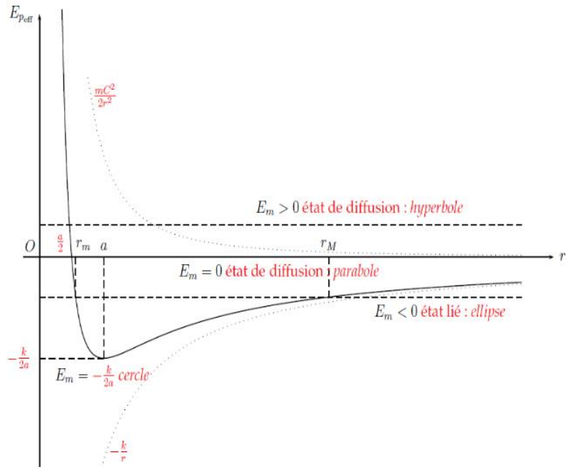
TD Forces centrales - Correction

Exercice 1 : Masse de la Terre (179, 180, 181)

1. La vitesse de propagation de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8 m/s$. D'où $OM = \frac{c\tau}{2} = 377400 km$.
   La relation entre les côtés du triangle TOL donne $TL^2 = OL^2 + R_T^2 - 2OL.R_T \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.
   Alors $TL = \sqrt{(OM + R_L)^2 + R_T^2 + 2(OM + R_L)R_T sin\theta}$
   Finalement $TL = 383600 km$
2. Le champ de gravitation de la Terre en L a pour expression $\overrightarrow{G_T}(L) = -\frac{GM_T}{TL^2}\overrightarrow{e_r}$, avec $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_{T\to L}} = \frac{\overrightarrow{TL}}{TL}$
3. La lune étant soumise à la seule force gravitationnelle de la Terre, son accélération dans le référentiel géocentrique est purement radiale. Si sa trajectoire est circulaire, elle est uniforme. Sa vitesse est donc $\overrightarrow{v_{L/R_O}} = TL\omega_L\overrightarrow{e_\theta}$ avec $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = 0{,}266.10^{-5} rad/s$ et son accélération vaut donc $\overrightarrow{a_{L/R_O}} = -\frac{v^2}{TL}\overrightarrow{e_r} = -TL{\omega_L}^2\overrightarrow{e_r}$. Le PFD appliqué à la Lune dans le référentiel géocentrique donne $M_L\overrightarrow{a_{L/R_O}} = \overrightarrow{F_{grav}}(L) \Leftrightarrow \overrightarrow{a_{L/R_O}} = G_T(L) \Leftrightarrow TL{\omega_L}^2 = \frac{GM_T}{TL^2}$.
4. Soit $M_T = \frac{TL^3\omega_L^2}{G} = 6{,}0.10^{24} kg$.
   Remarque : On arrive au résultat en appliquant la 3ème loi de Kepler : $\frac{{T_L}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ avec $a = TL$

Exercice 2 : Paramètre d'impact (175, 176, 177)

1. $\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{O/R}}(M) = \overrightarrow{M_O} = \vec{0}$ alors $\vec{L}_O(M) = mr\overrightarrow{e_r} \times \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ donc $r^2\dot{\theta} = cst$. C'est la constante des aires.
   $\frac{\vec{L}_O(P)}{m} = \overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{v_0} = b\overrightarrow{e_y} \times -v_0\overrightarrow{e_x} = bv_0\overrightarrow{e_z}$
2. On a $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r) = E_0$ avec $E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$
3. 

4. L'énergie mécanique se conserve. A l'entrée du système solaire on a $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$. La trajectoire est une hyperbole.
5. La vitesse est tangente à la trajectoire.
6. $r_{min}v_{r=rmin} = bv_0$
7. On utilise la conservation de l'énergie mécanique. $E_m = \frac{1}{2}mv_{r=rmin}^2 - \frac{GmM}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$
8. On a $\frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{r_{min}}\right)^2 - \frac{GmM}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ soit ${v_0}^2{r_{min}}^2 + 2GMr_{min} - b^2{v_0}^2 = 0$. On trouve $r_{min} = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + b^2{v_0}^4}}{{v_0}^2} \geq R$. On en déduit b.

Exercice 3 : Freinage (172, 173, 174, 182, 185)

1. $T_0 = 24\,h$.
2. La résultante des forces étant colinéaire avec le vecteur position, son moment par rapport à la Terre est nul et on en déduit par le théorème du moment cinétique que ce dernier est constant au cours du temps.
3. Si la valeur du moment cinétique est nulle, le mouvement est rectiligne. Sinon le mouvement a lieu dans le plan passant par O, centre de la Terre, et perpendiculaire au moment cinétique. Il s'agit forcément du plan équatorial.
4. Dans ce plan, on utilise les coordonnées polaires et on explicite l'expression du moment cinétique soit $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$. On peut définir la constante des aires par $C = r^2\dot{\theta}$.
5. Le mouvement est circulaire si r est une constante. Comme la constante C est une constante, on en déduit que si r est constant, $\dot{\theta}$ est également constant. Par conséquent, le mouvement est uniforme.
6. La vitesse s'exprime en coordonnées polaires par $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ dans le cas d'un mouvement circulaire. La projection du principe fondamental de la dynamique sur $\overrightarrow{e_r}$ donne $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{r^2}$. On en déduit $v^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{r}$.
7. $r\Omega^2 = \frac{GM_T}{r^2}$ alors $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\Omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_T{T_0}^2}{4\pi^2}}$.

   De plus $r = R_T + h$. Donc $h = \sqrt[3]{\frac{GM_T{T_0}^2}{4\pi^2}} - R_T = 36000\ km$
8. L'énergie cinétique peut s'exprimer par $Ec = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{GmM_T}{2r}$
9. Quant à l'énergie potentielle, elle vaut $Ep = -\frac{GmM_T}{r} = -2Ec$
10. On en déduit l'énergie mécanique $Em = Ec + Ep = -Ec = \frac{Ep}{2} = -\frac{GmM_T}{2r}$
11. On effectue un développement limité de l'énergie potentielle $Ep(r + \Delta r) = -\frac{GmM_T}{r}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^{-1} == -\frac{GmM_T}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$. On en déduit $\Delta Ep = \frac{GmM_T}{r^2}\Delta r$. On peut aussi calculer $Ep(r - \Delta r) - Ep(r) = \Delta Ep$
12. Comme $Em = \frac{Ep}{2}$reste valable sur la trajectoire qui est supposée quasi-circulaire, on en déduit $\Delta Em = \frac{GmM_T}{2r^2}\Delta r$
13. Le travail de la force de frottement s'écrit $W_f = -amv\vec{v}.\vec{v}T_0 = -amv^3T_0$ car v est constante.
14. L'application du théorème de l'énergie mécanique donne $\frac{dEm}{dt} = W_f$ soit en utilisant les résultats précédents et l'expression de la période de révolution on obtient $\Delta r = -4\pi ar^2$
15. Le satellite se rapproche de la Terre sous le freinage de la force de frottement.
16. L'expression de la vitesse conduit à $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \frac{2\pi r}{T_0}$. On en déduit la troisième loi de Kepler.
17. Avec les hypothèses proposées dans l'énoncé, on a $T_0 dr = -4\pi ar^2 dt$. En utilisant la troisième loi de Kepler, on a $dr = -2a\sqrt{GM_T r}dt$. En intégrant entre r_0 et r pour une origine des temps en r_0, on en déduit $\sqrt{r} = \sqrt{r_0} - a\sqrt{GM_T}t$ soit $K = -a\sqrt{GM_T}$.

Exercice 4 : Voyage vers Mars (179, 183, 184)

1. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à la Terre donne $\frac{M_T v_T^2}{r_T} = \frac{GM_T M_S}{r_T^2}$ alors $GM_S = r_T v_T^2$

   De plus $E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_S}{r_T} = \frac{GmM_S}{r_T + r_M}$

   Donc $v_P = \sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_T + r_M}\right)} = v_T\sqrt{\frac{2r_M}{r_T + r_M}} = 32{,}97\ km.s^{-1}$

2. On a $E_m = \frac{1}{2} m_{sat} v^2 - \frac{G m_{sat} m_T}{R_T} \geq 0$ donc $v \geq v_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11{,}2 km/s$ appelée vitesse de libération.
3. La conservation de l'énergie s'écrit $E = \frac{1}{2} m {v_0}^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = \frac{1}{2} m v_\infty^2$

   La vitesse de libération correspond à une énergie nulle $\frac{1}{2} m {v_L}^2 = \frac{GmM_T}{R_T}$. D'où en retranchant membre à membre, $v_0^2 - v_L^2 = v_\infty^2$. Donc $v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v_L^2}$
4. Pour profiter de l'élan de la Terre, il faut tirer dans la direction et le sens du mouvement de la Terre.
5. On a $v_\infty = v_P - v_T$ alors $v_0 = \sqrt{(v_P - v_T)^2 - v_L^2} = 11{,}59\ km.s^{-1}$. Tirer vers Mars est à peine plus coûteux qu'échapper à l'attraction terrestre.
6. D'après la troisième loi de Kepler

$$\left(\frac{2\tau}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{r_T + r_M}{2r_T}\right)^3$$

   Alors $\tau = \frac{T_T}{2} \left(\frac{r_T + r_M}{2r_T}\right)^{3/2} = 0{,}709\ an.$