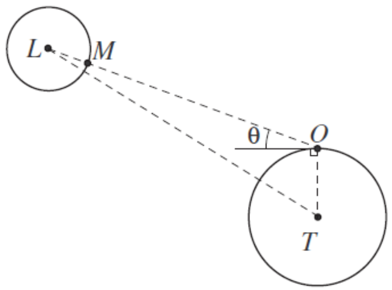
TD Forces centrales

Exercice 1 : Masse de la Terre (179, 180, 181)

On connaît actuellement la distance Terre-Lune, au centimètre près, à l'aide de miroirs M, installés sur la Lune par les astronautes des missions Apollo. Un laser pointé sur la Lune tire une salve lumineuse dont on mesure la durée τ de propagation aller-retour depuis l'observatoire O où se déroule l'expérience. Lorsque l'angle θ de la hauteur angulaire de la Lune au-dessus de l'horizon vaut 45°, on trouve $\tau = 2,516\ s$.



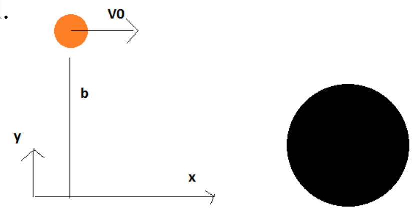
1. Calculer la distance OM. En déduire la distance TL sachant que $R_T = 6\,400\ km$ et $R_L = 1\,700\ km$.
2. Quelle est l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{G_T}(L) = \frac{\overrightarrow{F_{grav}}(L)}{M_L}$ produit par la Terre en L?

La période de révolution sidérale de la Lune, c'est-à-dire la période du mouvement orbital lunaire mesurée dans un référentiel géocentrique, dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines, vaut $T_L = 27j\ 8h$.

3. Trouver l'accélération de la Lune, en supposant que le centre de la Lune décrit une trajectoire circulaire dont le centre est occupé par la Terre.
4. En déduire la masse de la Terre.

Exercice 2 : Paramètre d'impact (175, 176, 177)

Le Soleil S de masse M est supposé fixe dans le référentiel galiléen de Kepler $R_K = (S, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Un point matériel P de masse m pénètre dans le système solaire, avec une vitesse initiale v_0 dont le support passe à la distance b de S. b est appelé paramètre d'impact. Le point P est repéré par ses coordonnées polaires d'origine S. On cherche une condition sur b pour qu'il n'y ait pas de collision entre P et le soleil. On suppose de plus que $P(m)$ n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil.



1. Montrer que la grandeur $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement. Comment s'appelle cette constante ? Montrer que cette grandeur vaut bv_0.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique dans le cas d'un champ Newtonien.
3. Construire une énergie potentielle effective $E_{peff}(r)$. Tracer le graphe de $E_{peff}(r)$.
4. Placer sur le graphe l'énergie mécanique du point M. Décrire la trajectoire du point M. Faire un schéma.
5. Justifier que la vitesse est orthogonale au vecteur position lorsque la distance SP est minimale.
6. En utilisant la loi de conservation de la question 1., établir une relation entre v_0, b, r_{min} (distance minimale d'approche) et $v(r = r_{min})$.
7. En utilisant une autre loi de conservation, que l'on justifiera, établir une relation entre v_0, r_{min}, $v(r = r_{min})$, M, et G la constante universelle de gravitation.
8. En déduire une condition sur b pour que P évite le Soleil.

Exercice 3 : Freinage (172, 173, 174, 182, 185)

On étudie le mouvement d'un satellite géostationnaire artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et G la constante de gravitation universelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

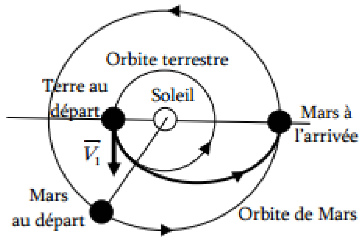
1. Que vaut T_0 ?
2. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.
3. En déduire que le mouvement du satellite est plan. Quel est ce plan ?
4. Montrer que cela permet de définir une constante des aires C dont on donnera l'expression.
5. Montrer que son mouvement est uniforme.
6. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M_T et r le rayon de l'orbite du satellite.
7. Déterminer l'altitude du satellite.
8. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C du satellite en fonction de G, M_T, m et r.
9. Même question pour l'énergie potentielle E_P du satellite. Donner la relation entre E_C et E_P.
10. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_M et les relations de E_M avec E_P et E_C.

Ce satellite subit une force de frottement fluide proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse. On note a le coefficient de frottement correspondant. Cette force reste suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les relations entre les différentes énergies restent valables et la variation Δr du rayon de la trajectoire est faible devant le rayon r.

11. Déterminer ΔE_P la variation d'énergie potentielle sur une révolution du satellite consécutive à une variation Δr du rayon de son orbite.
12. En déduire que l'énergie mécanique du satellite diminue sur une révolution d'une quantité ΔE_M qu'on explicitera.
13. Calculer sur une révolution le travail W_f de la force de frottement en fonction de a, m, v et T_0.
14. En déduire que $\Delta r = -4\pi a r^2$
15. Quel est par conséquent l'effet de la force de frottement sur le rayon de la trajectoire et la vitesse du satellite ?
16. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.
17. En supposant que la variation du rayon sur une révolution peut s'identifier à la dérivée du rayon par rapport au temps, montrer que $\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + Kt$ où K est une constante à exprimer en fonction de G, M_T et a.

Exercice 4 : Voyage vers Mars (179, 183, 184)

Schématiquement, la Terre et Mars décrivent des cercles de rayons r_T et $r_M = 1{,}5237\, r_T$ dans le sens gauche vu du Pôle Nord de la Terre. Dans le référentiel héliocentrique, la vitesse de la Terre est $v_T = 30\, km.s^{-1}$ et sa période orbitale est $T_T = 1\, an$.



L'orbite la plus économique pour aller de la Terre à Mars est une ellipse tangente aux deux extrémités de son grand axe à l'orbite de la Terre et à celle de Mars.

1. Quelle vitesse v_P possède le véhicule sur cette orbite à son périhélie ?

On tire de la surface terrestre un projectile avec une vitesse v_0 par rapport au référentiel géocentrique.

2. Déterminer la vitesse de libération v_L de la Terre.
3. Exprimer la vitesse v_∞ du projectile quand il est à une distance de la Terre grande par rapport au rayon terrestre et petite par rapport à la distance Terre Soleil en fonction de v_0 et v_L.
4. Dans quelle direction et dans quel sens faut-il le tirer pour se diriger vers Mars le plus économiquement possible ?
5. On donne $v_\infty = v_P - v_T$. En déduire la valeur correspondante v_0.
6. Calculer la durée τ en année de l'aller Terre-Mars.

Résolution de problème

On appelle horizon d'un trou noir la distance au trou noir en deçà de laquelle aucun corps ne peut s'échapper à l'attraction du trou noir c'est-à-dire en deçà de laquelle la vitesse de libération devient supérieure à la célérité de la lumière c dans le vide. C'est un concept de relativité générale. Nous en proposons ici une approche classique.

Expliquer la dénomination « trou noir » des corps possédant un tel horizon. Si le Soleil, à sa mort, venait à devenir un trou noir, quel serait son horizon ? Commenter. Minorer alors la masse volumique de ce trou noir.

Données :

- Masse du Soleil : $M_s = 2.10^{30}\ kg$
- Constante de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

Oral de concours : ENS Cachan Lyon MP 2017

Les effets relativistes entrainent que Mercure est soumise à une force dérivant d'un potentiel : $U(r) = -G\frac{mM}{r} - G\frac{L^2M}{mr^3c^2}$ où L est son moment cinétique.
Montrer que la trajectoire de Mercure est elliptique, le périhélie possédant un déplacement séculaire.