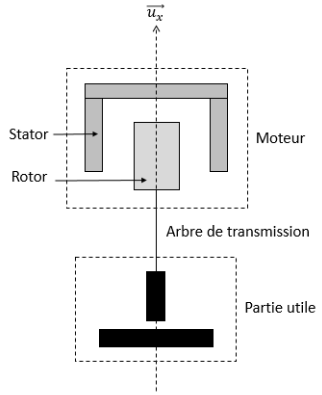
# TD Mouvement d'un solide

## Exercice 1 : Moteur (188, 191)

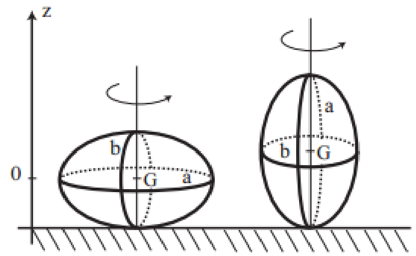
On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante. Le rotor partie tournante du moteur, entraine la parte tournante utile de la machine grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté $\overrightarrow{u_x}$. La vitesse de rotation du rotor est notée $\omega$, avec $\omega \geq 0$. La partie fixe du moteur (stator) entraine le rotor en exerçant sur lui un couple dont le valeur projeté sur $\overrightarrow{u_x}$ est $M_s > 0$.




1. En déduire le signe du couple $M_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.
2. Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $M_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de sorte que le moment projeté sur $Ox$ est nul. On note $J$ le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle de $\omega(t)$.
3. En supposant que les couples $M_s$ et $M_u$ sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de $\omega(t)$ sachant qu'on met le moteur en marche à $t = 0$.
4. Expliquer pourquoi il est plus dur de mettre en mouvement un rotor plus lourd.
5. En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des valeurs relatives des couples $M_s$ et $M_u$.
6. Que devient la puissance fournie par le stator en régime permanent ? Définir le rendement du moteur.

## Exercice 2 : Œuf en rotation (198, 199)

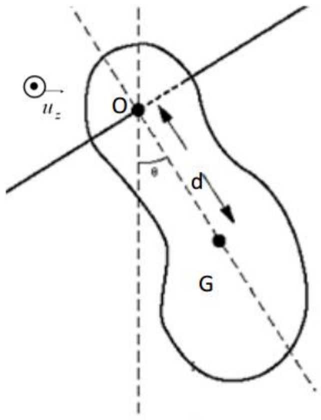
Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation autour de son petit axe. On constate qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire, l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe. Dans ce problème, on ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.
On modélise l'œuf par un ellipsoïde de révolution homogène de masse $m$ et de demi-axes $a$ et $b$, avec $b < a$. Les moments principaux d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à son centre de masse $G$ sont $J_1 = \frac{2}{5}mb^2$ dans le cas vertical et $J_2 = J_3 = \frac{1}{5}m(b^2 + a^2)$ dans le cas horizontal.




1. Exprimer l'énergie mécanique totale d'un œuf tournant à vitesse angulaire $\Omega$, en position horizontale et en position verticale.
2. Tracer ces énergies en fonction de $\Omega$ sur un même graphe. Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire $\Omega_C$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale. Calculer $\Omega_C$ pour $a = 3\ cmm$, $b = 2\ cm$ et $g = 10\ m.s^{-2}$.

## Exercice 3 : Horloge (189, 190, 192, 193, 194, 195)

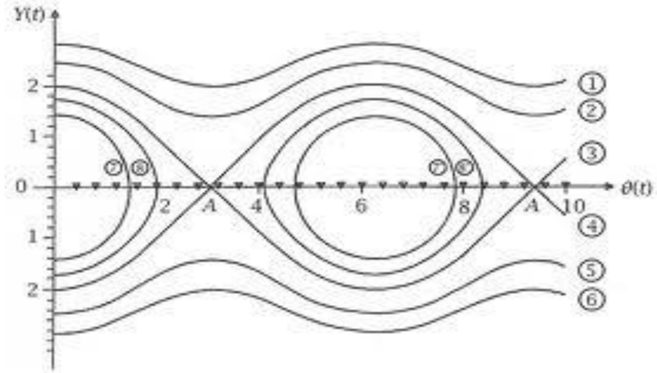
On s'intéresse au balancier d'une « horloge à poids ». On assimile le balancier, composé d'une tige fixée et d'un disque, au cas d'un pendule pesant tournant autour d'un axe horizontal ($Oz$), de masse $m$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe ($Oz$) est noté $J_{(Oz)} = J_\Delta$. La distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du pendule est $OG = d$. On supposera que la liaison pivot au niveau de l'axe est parfaite. Le référentiel $R_g = (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen.




1. Définir une liaison pivot parfaite.
2. En appliquant le TMC, écrire l'équation du mouvement du balancier.
3. Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.

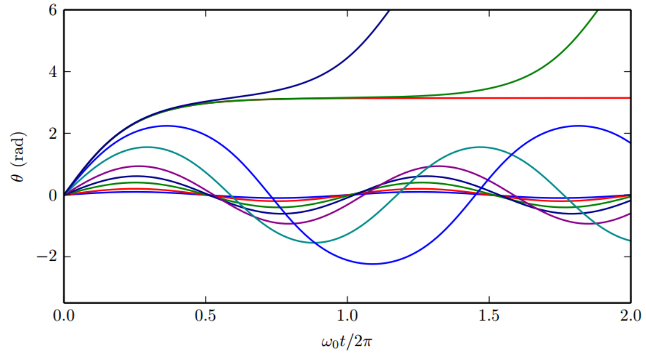
Le moment d'inertie $J_\Delta$, du type $J_\Delta = \alpha m d^2$, $\alpha$ étant une constante ajustable.

4. A quoi est relié $\alpha$ ? Comment doit-on modifier α si l'horloge retarde ?
5. Déterminer les équations permettant de tracer le portrait de phases suivant :




6. Classer les trajectoires en deux types, expliquer les différences. Que se passe-t-il au point $A$ ?

On a tracé les solutions de l'équation trouvée à la question 2.




7. Retrouver les 8 courbes du portrait de phase sur ce graphique. Utiliser les résultats pour mettre en évidence le non isochronisme des oscillations
8. Tracer le portrait de phase d'un mouvement pendulaire dans le cas où on tient compte des frottements.

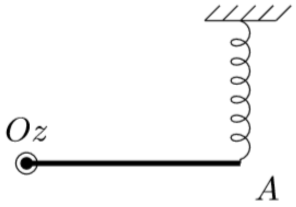
## Résolution de problème

Retrouver, en fonction des dimensions de votre corps, l'ordre de grandeur de la vitesse de marche naturelle.

Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse $m$ et longueur $l$ par rapport à une de ses extrémités vaut $J = \frac{ml^2}{3}$.

## Oral de concours : CCP 2017

Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse $m$, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe $Oz$. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en $A$ à un ressort de longueur à vide $l_0$ et de raideur $k$. L'autre extrémité du ressort est fixe.




1. Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de $k$ et de $l_0$.
2. La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point $A$ se déplace verticalement.