TD Loi du moment cinétique - Correction

Exercice 1 : Levier (170)

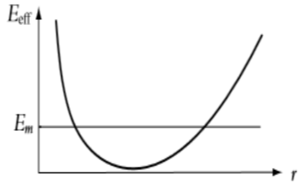
1. On suppose que l'ensemble est à l'équilibre. On a la somme des moments nulle $||\overrightarrow{OR} \times M\vec{g}|| = ||\overrightarrow{OA} \times m\vec{g}|| \Leftrightarrow Mgd_1 cos\alpha = mgd_2 cos\alpha$ alors $m = \frac{d_1}{d_2}M = 65kg$. On eut utiliser le bras de levier.
2. Pour être plus efficace avec une force de norme fixée, il faut augmenter le bras de levier et exercer une force $\vec{F}$ perpendiculairement au levier. Le moment de la force devient $-Fd_2$. Ainsi $F_{min} = Mg\ cos\alpha \frac{d_1}{d_2} = 330N$ au lieu de $F = Mg\ \frac{d_1}{d_2} = 660N$

Exercice 2 : Conservation de L (168, 169, 171)

1. Le signe du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe (Oz) est positif.
2. Le moment cinétique caractérise le fait qu'un point tourne autour d'un autre point.
3. On utilise le TMC et on montre que la somme des moments est nulle car le poids et la réaction du support se compense et car la tension du fil est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. Donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{L} = \overrightarrow{L_O}$.
4. Le point M suit une spirale décroissante.
5. Avec la conservation du moment cinétique on a $mr(t)^2\dot{\theta} = mv_O l_O$. On montre que l'enroulement du fil implique que $r(t) = l_O - R\Omega t$.
6. On a $\dot{\theta} = \frac{v_O l_O}{(l_O - R\Omega t)^2}$ donc $\theta(t) = \frac{1}{R\Omega}\frac{v_O l_O}{l_O - R\Omega t} - \frac{v_O}{R\Omega}$.
   Donc $\theta(r) = \frac{1}{R\Omega}\frac{v_O l_O}{r} - \frac{v_O}{R\Omega}$ donc $r(\theta) = \frac{v_O l_O}{v_O + R\Omega\theta}$.
   On a bien une spirale décroissante.

Exercice 3 : Ressort tournant (168, 169, 171)

1. Les trois forces qui s'exercent sur le point M sont le poids, la réaction du support normale et la tension du ressort. Puisque le plan est horizontal on a $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$. Le TMC s'écrit donc $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \times \vec{T} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}\, et\, \vec{T}$ sont colinéaires. Donc $\vec{L}_O$ est une constante.
2. L'expression générale du moment cinétique est $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v}$. A $t = 0$, la vitesse est nulle donc $\vec{L}_O = \vec{0}$. On a donc la vitesse toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox.
3. La projection du PFD (pas de rotation pas de TMC) sur Ox donne $m\ddot{x} = -k(l - l_0)$. Or $x = l$ donc $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$ avec $\omega_0 = \frac{k}{m}$. Les solutions sont $x(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t) + l_0$. Avec les conditions initiales on trouve $A = 0{,}2l_0$ et $B = 0$. L'intervalle de variation de l est donc $[0{,}8l_0; 1{,}2l_0]$.
4. $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$. A $t = 0$ on a . $\vec{L}_O = m{l_1}^2\omega\overrightarrow{e_z}$
5. L'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$.
   Dans ce cas le poids ne travaille pas donc l'énergie potentielle du poids est constante, on a pas besoin d'en tenir compte. La réaction du support perpendiculaire au mouvement ne travaille pas non plus on a le théorème de l'énergie cinétique $dE_c = \delta W = -dE_p$ alors $E_m = cst = \frac{m}{2}l_1^2\omega^2 + \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}(r - l_0)^2$.
6. Puisque le moment cinétique est constant, la vitesse angulaire est de signe constant positifs en raison des condition initiales. Donc le module L est égal à $mr^2\dot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$. Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}(r - l_0)^2$ d'où $E_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}(r - l_0)^2$.
   Le mouvement ne peut avoir lieu que dans les zones où $E_m \geq E_{eff}$.



7. Il faudrait une énergie mécanique infinie pour s'éloigner à l'infini de O.
8. La vitesse radiale $\dot{r}$ peut s'annuler au cours du mouvement aux points extrêmes pour lesquels $E_m = E_{eff}$. En revanche la vitesse angulaire ne peut pas s'annuler car avec L constant cela entrainerait $r \to \infty$ ce qui est impossible.
9. Il faudrait une énergie infinie pour atteindre O.
10. Si le mouvement est circulaire r est constant alors $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ est aussi constante.
11. La seule possibilité correspond au minimum de E_{eff}. Or $\frac{dE_{eff}}{dr}(l_1) = -\frac{L^2}{ml_1^2} + k(l_1 - l_0) = 0$. On trouve $l_1 = l_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Cette solution est possible si $\omega < \omega_0$.