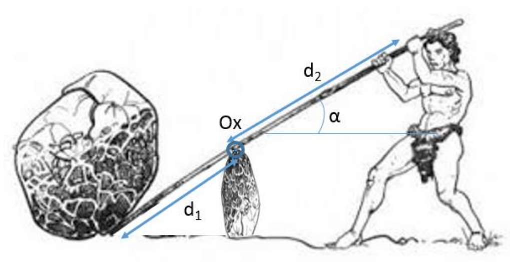
TD Loi du moment cinétique

Exercice 1 : Levier (170)

Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\ kg$. Les longueurs valent $d_1 = 50\ cm$ et $d_2 = 1{,}5\ m$ et $\alpha = 60°$. On admet que le rocher commence à se soulever quand les moments par rapport à l'axe Ox du poids du rocher et de la force d'Archimède sont opposés.



1. Archimède se suspend au levier. Quelle doit être la masse minimale pour que le rocher se soulève ?

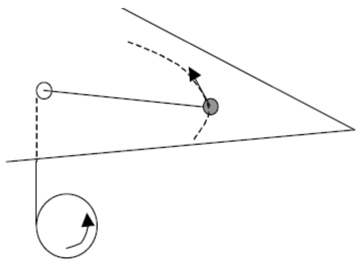
Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier.

2. Comment doit-on procéder pour être plus efficace et quelle force doit-il exercer ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

Exercice 2 : Conservation de L (168, 169, 171)

Un point matériel (M, m) est mobile sans frottement sur un plan horizontal perce d'un trou O dans lequel est engagé un fil inextensible. On note Oz l'axe vertical ascendant.

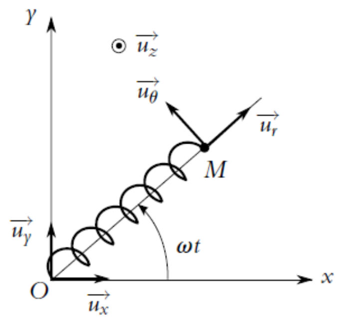
Ce fil est lié à l'une de ses extrémités à M tandis que l'autre est enroulée sur le tambour d'un treuil. Initialement, le fil est tendu, M est lance à une vitesse v_0 orthogonale a la direction du fil, a une distance l_0 du trou. Le treuil enroule le fil à vitesse constante, avec une vitesse angulaire Ω sur un tambour de rayon R, sans chevauchement des spires.



1. Représenter sur le schéma le moment cinétique de M par rapport à O. Quel est le signe du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe (Oz).
2. Donner la signification physique du moment cinétique.
3. Montrer que le moment cinétique se conserve.
4. Décrire qualitativement le mouvement de M.
5. Etablir une relation entre la longueur $r(t)$ de fil à l' instant t ($r(t) = OM$) et sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la relation entre $r(t)$ et la vitesse d'enroulement du fil. On choisira $\theta(0) = 0$.
6. Donner l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire.

Exercice 3 : Ressort tournant (168, 169, 171)

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan (O, x, y) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. Un point M (masse m) est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité étant fixée en O.



1. Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique par rapport à O.

À $t = 0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $l_i = 1{,}2\ l_0$ soit $\overrightarrow{OM}(t = 0) = 1{,}2\ l_0\overrightarrow{e_x}$.

2. Calculer $\overrightarrow{L_0}$. Quelle est la nature de la trajectoire ?
3. Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort $l(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de l.

On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM}(t=0) = l_1\overrightarrow{e_x}$, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = l_1\omega\overrightarrow{e_y}$, orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O,x,y).

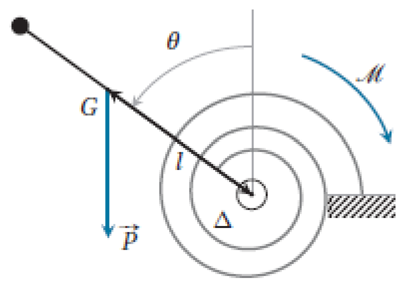
4. Préciser $\overrightarrow{L_0}$ en fonction de $l, \dot{\theta}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L le module de $\overrightarrow{L_0}$.
5. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique. Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ? Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_m. Préciser l'expression de E_m en fonction des conditions initiales et en fonction de $l, \dot{l}, \dot{\theta}, m, k$ et l_0.
6. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire $E_m = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + E_{eff}(l)$. Préciser l'expression de $E_{eff}(l)$ et tracer son allure.
7. La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?
8. La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours du mouvement ?
9. La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

On cherche à déterminer une condition entre l_1 et v pour avoir un mouvement circulaire.

10. Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.
11. Déterminer l_1 en fonction de k, l_0 et ω. Est-elle valable pour tout ω ?

Résolution de problème

On modélise un manège de jardin d'enfants où l'enfant se balance sur un siège fixé au bout d'un ressort à boudin par un ressort à spirale auquel est fixée rigidement une tige.



Ce ressort exerce sur la tige un moment de rappel harmonique $M_\Delta = -K\theta$ par rapport à l'axe Δ du ressort quand la tige a tourné d'un angle θ. On néglige les frottements sur l'axe.

Qu'observe-t-on si un adulte essaie de se balancer ?

Oral de concours : CCP MP 2018

On considère un pendule constitué d'un fil de masse négligeable de longueur L et d'un point M de masse m, lié à l'axe Ox au point I. Soit deux référentiels $R(Oxyz)$ et $R'(Ixyz)$.
Le point I possède un mouvement tel que $x_i(t) = x_0 cos(\omega t)$.

1. Que peut-on dire du référentiel R' ?
2. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M et les exprimer en coordonnées polaires.
3. Appliquer le théorème du moment cinétique au point I. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.
4. La résoudre en régime permanent.