

TD Inductance propre et mutuelle - Correction

Exercice 1 : Auto-induction (270, 271, 272, 274)

- On oriente la surface de façon à ce que $\vec{B}(t)$ et le vecteur surface $\vec{S}$ soient de même sens. $\Phi = \vec{B}_{ext}(t) \cdot \vec{S} = B_0 S \cos(\omega t)$.
D'après la loi de Faraday, la f.e.m. induite est telle que $e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ d'où $e_{ind} = B_0 S \omega \sin(\omega t)$.
L'amplitude de la f.e.m. induite est : $E_{ind} = B_0 S \omega$.
Application numérique : $E_{ind} = 50 \cdot 10^{-3} \times \pi \times 25 \cdot 10^{-4} \times 2\pi \times 50 = 0,123 \text{ V}$.
- L'intensité est comme e_{ind} dans le sens de l'orientation choisie pour le circuit, elle est donnée par la loi de Pouillet : $i_{ind} = \frac{e_{ind}}{r} = \frac{B_0 S \omega}{r} \sin(\omega t)$. L'amplitude est : $I_{ind} = \frac{B_0 S \omega}{r}$. AN : $I_{ind} = 0,123 \text{ A}$.
- Si on ne néglige pas L, alors on a $|Z| = \left| \frac{e}{i} \right| = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$.
Si on néglige L, alors on a $|Z| = \left| \frac{e}{i} \right| = R$ alors l'intensité est plus petite que dans le cas où on tient compte de l'auto-induction. On a donc sous-estimé l'intensité.
- $L = \mu_0 R \left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 2 \right] = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 5 \cdot 10^{-2} \left[\ln\left(\frac{40 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 10^{-3}}\right) - 2 \right]$ d'où $L = 0,395 \mu\text{H}$
- Le flux propre associé à l'auto-induction est le courant $\Phi_p = L i_{ind} = L \frac{B_0 S \omega}{r} \sin(\omega t)$. La fem auto-induite est $e_{auto-ind} = -L \frac{di_{ind}}{dt} = -L \frac{B_0 S \omega^2}{r} \cos(\omega t)$. Son amplitude est : $E_{auto-ind} = L \frac{B_0 S \omega^2}{r} = L \omega I_{ind}$.
Application numérique : $E_{auto-ind} = 0,395 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 50 \times 0,123 = L \omega I_{ind} = 15,3 \mu\text{V}$.
- Loi des mailles : $e_{ind} + e_{auto-ind} - r i_{ind} = 0$
Bilan de puissance : $e_{ind} i_{ind} = r i_{ind}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{L i_{ind}^2}{2} \right)$ la puissance induite par le champ est dissipée par effet Joule et stockée dans la bobine.

Sur une période la puissance induite est dissipée par effet Joule. Car la bobine ne stocke pas d'énergie sur une période $\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{L i_{ind}^2}{2} \right) dt = 0$.

Exercice 2 : Circuit ampère métrique (270, 272, 276)

- L'étude qualitative renseigne sur la nature des phénomènes mis en jeu : les variations de l'intensité $I(t)$ parcourant le fil provoquent une modification du champ magnétique régnant dans le tore et donc un phénomène d'induction. Puisque le bobinage est fermé sur un dipôle résistif, un courant induit $i(t)$ apparaît. L'étude du phénomène d'induction dans le circuit bobiné nécessite donc la prise en compte d'un terme dû au champ propre et d'un terme de mutuelle induction.
Il est alors possible d'exprimer la force électromotrice induite dans le bobinage par la relation de Faraday : $e = -M \frac{dI}{dt} - L \frac{di}{dt}$
On en déduit la relation faisant intervenir la tension aux bornes du dipôle résistif : $u(t) = R i(t) = e$. L'équation différentielle liant $I(t)$ à $u(t)$ est $\frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = -M \frac{dI}{dt}$.
- L'équation différentielle précédente est linéaire à coefficients constants, elle correspond donc à un filtrage. Pour préciser de quelle nature de filtre il s'agit on détermine sa fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{u}}{\underline{I}} = -j\omega M \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{R}}$. Il s'agit d'un filtre passe-haut, de pulsation de coupure basse $\omega_c = \frac{R}{L}$ et de gain en haute fréquence $-\frac{RM}{L} = -\frac{R}{N}$.
- Pour un courant d'intensité I constante, le dispositif ne détecte rien. L'absence de variation de champ crée empêche en effet l'apparition d'un phénomène d'induction.
Pour un courant d'intensité variant sinusoïdalement, le signal détecté sera de la même forme et même pulsation. On observe sa dérivée.
Si la pulsation des variations est très supérieure à ω_c , l'amplitude des variations de la tension est proportionnelle à l'amplitude de $I(t)$ d'un facteur égal à R/N . Les deux signaux sont en opposition de phase.

Pour un échelon d'intensité, on retrouve la réponse indicielle d'un filtre passe haut. La tension subit une variation brutale, puis s'annule exponentiellement avec une constante de temps égale à L/R .

4. Notons $\phi = Li(t) + MI(t)$ le flux de champ magnétique dans le tore. Pour trouver M on annule i et inversement.

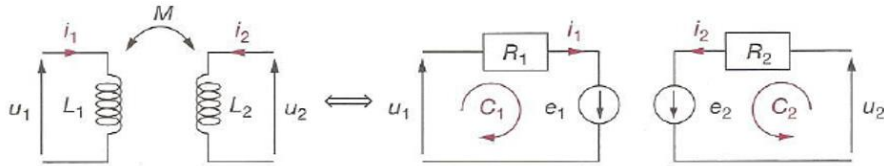
Calculé pour N spires, le flux mutuel est $\phi = N \frac{\mu_0 I}{2\pi R_T} \pi a^2$ donc $M = N \frac{\mu_0}{2R_T} a^2$

Pour le flux propre on a $\phi = N^2 \frac{\mu_0 i}{2\pi R_T} \pi a^2$ alors $L = N^2 \frac{\mu_0}{2R_T} a^2$.

5. On remarque que M est proportionnel à N alors que L est proportionnel à N^2 . L'inductance propre augmente fortement avec le nombre de spires.

Exercice 3 : Plaque à induction (276, 277, 278)

1.



$$v_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + \frac{L_1 di_1}{dt} + \frac{M di_2}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + \frac{L_2 di_2}{dt} + \frac{M di_1}{dt}$$

2. En régime sinusoïdal forcé on a

$$\underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM\omega\underline{i}_2 \text{ et } 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1$$

$$\text{Donc } \underline{A} = \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

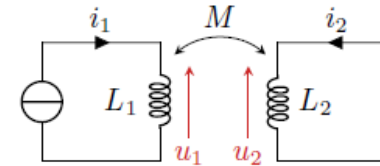
3. $\underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM\omega\left(-\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}\underline{i}_1\right)$

$$\text{donc } \underline{Z}_e = \frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

4. Si $R_1 \ll L_1\omega$ et $R_2 \ll L_2\omega$ alors $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{M}{L_2}$ et $\underline{Z}_e = \frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_1} = jL_1\omega\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)$ donc $\left|\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1}\right| = 8,3$ et $|\underline{Z}_e| = 2,1 \Omega$
5. Le champ magnétique, créé par l'inducteur et vu par la plaque, diminue lorsqu'on éloigne la plaque. Le flux de $\vec{B}$ à travers la plaque diminue et donc M diminue. Alors Z_e augmente et, pour une même tension d'alimentation, le courant décroît.

Oral de concours CCP PSI 2013 (275)

1. Coefficients d'induction propre $L_1 = \frac{\mu_0 N^2}{l} \pi r_1^2$, $L_2 = \frac{\mu_0 N^2}{l} \pi r_2^2$ et le coefficient d'induction mutuelle $M = \frac{\mu_0 N^2}{l} \pi r_1^2$.
2. Le circuit équivalent est le suivant :



Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant i_1 , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a un couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur

$$u_1 = +\frac{L_1 di_1}{dt} + \frac{M di_2}{dt} \text{ et } u_2 = \frac{L_2 di_2}{dt} + \frac{M di_1}{dt}$$

D'après la loi des mailles, $u_2 = 0$ donc $\frac{L_2 di_2}{dt} = -\frac{M di_1}{dt}$.

Par intégration $i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1 + cst$.

Comme le solénoïde S2 n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} I \cos(\omega t)$$

D'amplitude $I_2 = \frac{M}{L_2} I$

3. D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{l} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

D'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{l} \left(1 - \frac{M}{L_2}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z$$