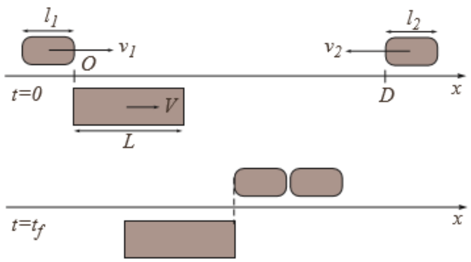
TD Cinématique - Correction

Exercice 1 : Dépassement d'un autocar (94, 95)

Il est nécessaire de faire deux schémas de l'axe Ox où, sur le premier, on fait apparaître les positions des trois véhicules au début du dépassement (l'origine O étant l'avant de la voiture (1) coïncidant, à $t = 0$, avec l'arrière du bus qu'elle dépasse) et où, sur le second, on représente les positions des véhicules à la fin du dépassement dans la situation la plus critique, la voiture (1) se rabattant in extremis.



En utilisant les propriétés du mouvement rectiligne uniforme, on écrit les équations horaires des différents points : on note x_1 les abscisses relatives à la voiture qui double, x_2 celles relatives à la voiture qui arrive en face et X celle relatives au bus. On note l'indice AV pour l'avant d'un véhicule et AR pour l'arrière de ce véhicule.

On a $\begin{cases} x_{1,AV} = v_1 t \\ x_{1,AR} = v_1 t - l_1 \end{cases}$ $\begin{cases} X_{AV} = Vt + L \\ X_{AR} = Vt \end{cases}$ $\begin{cases} x_{2,AV} = -v_2 t + D \\ x_{2,AR} = -v_2 t + D + l_2 \end{cases}$

A la date t_f de la fin du dépassement, l'accident sera évité si :

$$\begin{cases} x_{1,AV} < x_{2,AV} \\ x_{1,AR} = X_{AV} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 t < -v_2 t + D \\ v_1 t_f - l_1 = V t_f + L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D > \dfrac{v_1 + v_2}{v_1 - V}(L + l_1) = 240m \\ t_f = \dfrac{L + l_1}{v_1 - V} \end{cases}$$

Exercice 2 : Colimaçon (93, 94, 96, 99)

1. Le pas de l'hélice correspond à la dénivellation subie par le mobile sur un tour d'hélice. Soit à la variation Δz pour une variation $\Delta\theta = 2\pi$ de l'angle θ. Soit pour un intervalle de temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$; donc $h = aT = \frac{2\pi a}{\omega}$ d'où finalement : $a = \frac{\omega h}{2\pi}$.
2. Dans la base cylindrique, à partir des coordonnées de position :
   $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r} + at\overrightarrow{e_z}$
   $\vec{v} = R\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + a\overrightarrow{e_z} = R\omega\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\omega h}{2\pi}\overrightarrow{e_z}$
   L'angle α du vecteur vitesse avec l'axe (Oz) a pour tangente le rapport de sa coordonnée orthoradiale avec sa coordonnée axiale, soit : $\tan(\alpha) = \frac{2\pi R}{h}$.
3. Le vecteur-accélération se calcule par dérivation temporelle du vecteur-vitesse : $\vec{a} = R\omega\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r}$
   Ce vecteur-accélération apparaît orthogonal au vecteur-vitesse. Le mouvement sera donc uniforme puisque $\vec{a}.\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0$
4. $|\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 + \left(\frac{\omega h}{2\pi}\right)^2} = \omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = cst$. En intégrant cette relation on a $s(t) = \omega t\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$ pour $10T$ on trouve une longueur totale de $20\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$.

Exercice 3 : Test de stabilité (94, 97, 98, 100)

1. L'équation $y(x) = A.cos(B.x)$ doit mettre en jeu des constantes A et B telles que notamment : $y(0) = d_0$ et $y(L) = -d_0$. A correspond à l'amplitude de variation de $y(x)$ donc $A = d_0$. B doit être tel que $y(x + 2L) = y(x)$ soit donc $cos(Bx + 2LB) = cos(Bx)$ ce qui implique : $2\pi = 2LB$. On tire $B = \frac{\pi}{L}$.
2. Exprimons vitesse et accélération dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ en pensant aux dérivations composées.

$$\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y}$$

Concernant la coordonnée y, elle n'est pas explicitement dépendante du temps t : $y(x)$ avec $x(t)$. Par dérivation composée $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} v_0$

$$\vec{v} = v_0 \overrightarrow{e_x} - \frac{\pi}{L} v_0 d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \overrightarrow{e_y}$$

Donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial(\frac{\pi}{L} v_0 d_0 \sin(\frac{\pi x}{L}))}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\pi^2}{L^2} v_0^2 d_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \overrightarrow{e_y}$

3. Le vecteur vitesse est tangent à la courbe et le vecteur accélération est vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.
4. Il faut avoir un module de l'accélération qui reste inférieur à $0{,}7\ g$. Il faut donc majorer la fonction $|\frac{\pi^2}{L^2} v_0^2 d_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)|$ avec $|\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)|$ majoré par 1. On tire $L > \pi v_0 \left(\frac{d_0}{0{,}7g}\right)^{1/2}$.

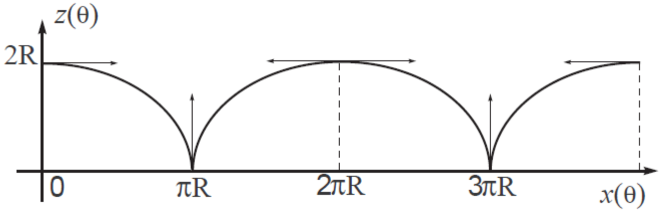
Exercice 4 : Roue de vélo (99)

1. Condition de roulement sans glissement : $C_0C = \widehat{OI} \Leftrightarrow vt = R\theta \Leftrightarrow v = R\dot{\theta} = R\omega$
2. $\overrightarrow{OC} \begin{cases} x_C = vt = R\dot{\theta}t = R\omega t \\ z_C = R \end{cases}$

   Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \begin{cases} x_M = R(\dot{\theta}t + \sin(\theta)) = R(\omega t + \sin(\omega t)) \\ z_M = R(1+\cos(\theta)) = R(1+\cos(\omega t)) \end{cases}$

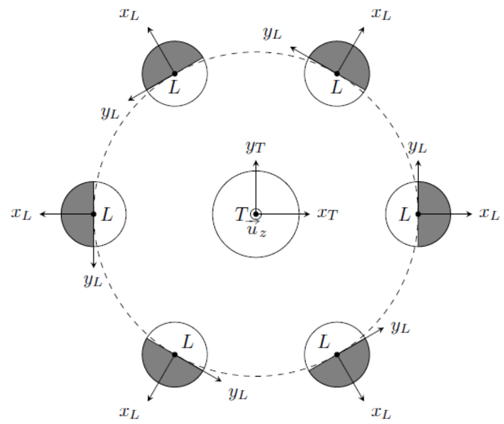
   $\overrightarrow{v_{M/R}} = \begin{cases} \dot{x}_M \\ \dot{z}_M \end{cases} = \begin{cases} R\omega(1+\cos(\omega t)) \\ -R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$

   $\overrightarrow{a_{M/R}} = \begin{cases} -R\omega^2 \sin(\omega t) \\ -R\omega^2\cos(\omega t) \end{cases} = -\omega^2 \begin{cases} R\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{cases} = -\omega^2 \overrightarrow{CM}$

   L'accélération est dirigée vers le centre de la roue.
3. 

Exercice 5 : La face cachée de la Lune (96, 99, 101)

1. Représentons le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. Pour représenter son mouvement, on utilise le fait que la face visible depuis la Terre est toujours la même. Ainsi, la Lune a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $(T, \overrightarrow{u_z})$.



2. La Lune effectue une révolution complète, c'est-à-dire une rotation de 2π en $\Delta T = 27{,}3\ jours$. Sa vitesse angulaire de rotation vaut donc $\Omega = \frac{2\pi}{\Delta T} = 2{,}7\ rad.s^{-1}$.
3. Le centre de la Lune a une trajectoire circulaire, parcourue à vitesse angulaire constante. L'analogue à la base polaire locale de centre T est ici la base $(\overrightarrow{u_{xL}}, \overrightarrow{u_{yL}})$. En traduisant les résultats établis en cours, on aboutit à $\overrightarrow{v_{L/géo}} = D\Omega\overrightarrow{u_{yL}}$ et $\overrightarrow{a_{L/géo}} = -D\Omega^2\overrightarrow{u_{xL}}$
   Numériquement, $v_{L/géo} = 1{,}0.10^3\ m.s^{-1}$.
4. Dans le référentiel sélénocentrique, la Lune a un mouvement de rotation autour de l'axe $(L, \overrightarrow{u_z})$. On voit à partir du schéma que comme dans le référentiel géocentrique, elle fait un tour sur elle-même en 27,3 jours.
5. On en déduit que la vitesse Ω_p de rotation propre de la Lune sur elle-même est la même que la vitesse de rotation Ω de la Lune autour de la Terre, $\Omega_p = 2{,}7\ rad.s^{-1}$.