TD Solide en rotation - Correction

Exercice 1 : Moteur (188, 191)

1. Le stator entraine le rotor et le rotor entraine la partie tournante. Ainsi, les couples exercés par le stator sur le rotor et par le rotor sur la partie utile sont de mêmes signes (positifs). Par principes des actions réciproques, le couple exercé par la partie utile sur le rotor est de signe opposé : $M_u < 0$. La partie utile tend à freiner le rotor, alors que le stator tend à accélérer en régime usuel de fonctionnement.
2. Comme il y a rotation autour de l'axe fixe $\overrightarrow{u_x}$, on applique le TMC au rotor : $\frac{dL_{Ox}}{dt} = J\dot{\omega} = M_{Ox} = M_s + M_u + M_f = M_s + M_u - \alpha\omega$
3. On résout $\omega(t) = \frac{M_s+M_u}{\alpha} + Aexp(-\frac{t}{\tau})$ où A est une constante, et $\tau = \frac{J}{\alpha}$ un temps caractéristique d'évolution du système. Avec la condition initiale $\omega(0) = 0$ on peut trouver A : $\omega(t) = \frac{M_s+M_u}{\alpha}(1 + exp\left(-\frac{t}{\tau}\right))$.
4. Si la masse augmente alors J augmente et τ diminue. Il faut un temps plus long pour que le moteur atteigne son régime permanent.
5. En régime permanent $t \gg \tau$ on a $\omega(\infty) = \frac{M_s+M_u}{\alpha}$. Cette vitesse dépend des frottements fluide : plis les frottements sont importants, moins la vitesse de rotation finale du système est élevée. Les frottements du fluide ont de plus un effet sur la durée du régime transitoire, de l'ordre de quelques τ. Comme le stator entraine le rotor, qui a son tour entraine la partie utile, nécessairement $M_s > |M_u|$ sinon le moteur ne peut se mettre en rotation.
6. Bilan énergétique en régime permanent $(M_s + M_u + M_f)\omega(\infty) = P_s + P_u + P_f = 0$. En régiem permanent la puissance $P_s > 0$ fournie par le sert d'une part à entrainer la partie utile ($P_u < 0$) elle est d'autre part dissipée sous forme de frottements avec le fluide ($P_f < 0$). On a alors le rendement $\eta = \frac{|P_u|}{P_s} = \frac{(M_u)\omega(\infty)}{(M_s)\omega(\infty)} = \frac{|M_u|}{|M_u|+\alpha\omega(\infty)}$. La valeur absolue provient du fait que $P_u < 0$ le stator cède de la puissance à la partie utile au travers du rotor.

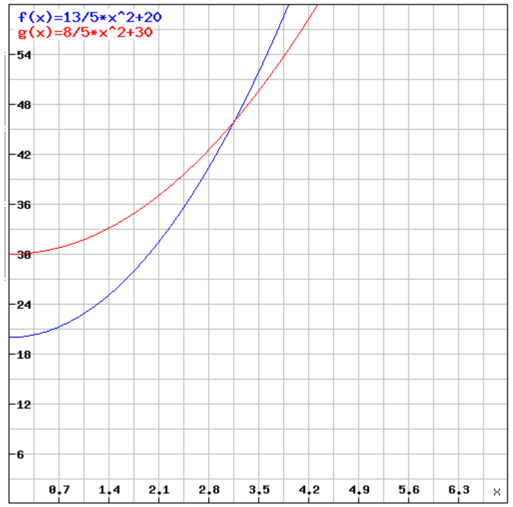
Exercice 2 : Œuf en rotation (198, 199)

On a en rouge l'énergie verticale et en bleu l'énergie horizontale.

On trouve Ω_C avec $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}mb^2 + \frac{1}{5}ma^2\right)\Omega_C{}^2 + mgb = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mb^2\right)\Omega_C{}^2 + mga$

Alors $\Omega_C^2\frac{1}{10}(a^2 - b^2) = g(a-b)$ donc $\Omega_C = \sqrt{\frac{10g}{a+b}}$

Avec $a = 3cm$ et $b = 2cm$ $\Omega_C = 44{,}7\text{rad/s}$



Exercice 3 : Horloge (189, 190, 192, 193, 194, 195)

1. Une liaison pivot est un mécanisme qui ne laisse qu'un degré de liberté de rotation autour d'un axe Δ à un solide. La liaison est dite parfaite si le moment des efforts exercés par le mécanisme sur le solide par rapport à l'axe Δ est nul.
2. On retrouve $J_\Delta\frac{d^2\theta}{dt^2} + mglsin(\theta) = 0$

3. On a pour θ faible $sin\theta = \theta$. Donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{J_\Delta}\theta = 0$ alors $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$. Alors $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgl}}$. On retrouve un OH.
4. Si l'horloge retarde T est trop faible il faut donc augmenter α . Inversement.
5. On a $\ddot{\theta}\dot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin(\theta)\dot{\theta} = 0$ donc $\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - \omega_0^2 \frac{d\cos(\theta)}{dt} = 0$ donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos(\theta)\right) = 0$.
   On a donc $\dot{\theta} = \sqrt{2\omega_0^2\cos(\theta) + 2K}$
6. On a les mouvements pendulaires 3, 4, 7 et 8. Et les mouvements révolutifs pour 1, 2, 5 et 6.
   En A on a une bifurcation entre les deux mouvements. Le système a le choix. Brisure de symétrie !!!
7. On retrouve les courbes 7 et 8 de faibles amplitudes, dans ce cas on a isochronisme des solutions.
   La courbe 3 ou 4 est représenté par la solution restant constante à partir d'un certain temps.
   Les courbes 1 et 2 sont les deux courbes divergentes.
   On observe le non isochronisme des solutions pour des solutions bornés de grande amplitude.
8. On a une spirale qui tends vers le point $(0;0)$.