Analyse dimensionnelle

1. Notion de dimension

a. Système International de Grandeurs

En physique, on peut montrer que toute grandeur peut s'exprimer en fonction d'uniquement sept grandeurs de base. Le Système International de Grandeurs (I.S.Q. en anglais) est fondé sur les sept grandeurs de base :

Grandeur de base	Symbole de la dimension
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Courant électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité lumineuse	J

b. Dimension d'une grandeur

Définitions

La dimension d'une grandeur physique traduit la nature physique de cette grandeur. Elle est l'expression de la dépendance d'une grandeur par rapport aux grandeurs de base.
Cette expression se met sous la forme d'un produit de puissances de facteurs correspondant aux symboles dimensionnels des grandeurs de base, en omettant tout facteur numérique.

La dimension d'une grandeur quelconque Q est donc notée :

$$[Q] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\gamma} \theta^{\varepsilon} N^{\zeta} J^{\eta}$$

Les grandeurs pour lesquelles tous les exposants sont nuls sont des grandeurs sans dimension. La convention de la représentation symbolique de la dimension de telles grandeurs est le symbole 1.

Propriétés

Dimension d'une somme :

$$C = A + B \ \Rightarrow [C] = [A] = [B]$$

Dimension d'un produit :

$$C = A \times B \ \Rightarrow [C] = [A] \times [B]$$

Dimension de la dérivée n-ième de la fonction f par rapport à la variable x :

$$\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = \frac{[f]}{[x]^n}$$

Dimension de la primitive de la fonction f par rapport à la variable x :

$$\left[\int f dx\right] = [f] \times [x]$$

c. Analyse dimensionnelle

La notion de dimension n'est pas seulement nécessaire à la compréhension de la nature des grandeurs physique.

Son utilisation est beaucoup large car elle permet notamment :
- de vérifier qu'un résultat n'est pas aberrant du point de vue physique,
- de déterminer la dimension d'une grandeur de dimension inconnue dans une équation,
- de déterminer la forme mathématique d'une loi physique,
- d'adimensionner une équation en vue d'une exploitation numérique efficace de ses solutions.

Homogénéité

Deux grandeurs physiques de même dimension sont dites homogènes.

Seule la comparaison de deux valeurs grandeurs physiques homogène à un sens. La masse, la vitesse, l'énergie sont des grandeurs de natures différents et donc de dimensions différentes. La comparaison d'une masse et d'une longueur n'a pas de sens physique.

Homogénéité d'une équation

Une équation aux grandeurs est dite homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.

Tous les termes d'un membre d'une égalité ont la même dimension.
L'argument d'une fonction transcendante (exp, ln, cos, sin, tan, cosh, sinh, tanh, arccos, arcsin, arctan, ...) est adimensionné.
Une formule inhomogène est nécessairement fausse.

Forme d'une loi physique : Théorème Vaschy-Buckingham

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs (A, B, C, D ...) caractéristiques du phénomène physique et dimensionnellement indépendantes, la grandeur X vérifie :

$$[X] = [A]^{\alpha}[B]^{\beta}[C]^{\gamma}[D]^{\delta} \dots$$

C'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$X = k\, A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta} \dots$$

où k est une constante numérique sans dimension.

d. Exercice

Déterminer la dimension des grandeurs suivantes :
- L'énergie cinétique E_C ;
- L'intensité du champ de pesanteur g ;
- La charge électrique q ;
- La pulsation ω.

Les expressions suivantes sont-elles homogènes :

- $kl^2 + mg = a$ où k est une constante de raideur, l une longueur, m est une masse et a une accélération ;
- $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + vt + 3$;
- $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = E$ où u et E sont une tension, τ un temps ;
- $E = \frac{h\lambda}{c}$ où h est la constante de Planck en $J.s$, λ une longueur d'onde, c la célérité de la lumière dans le vide et E l'énergie du photon considéré ;
- $\frac{U_s}{U_e} = \frac{R_1+R_2}{\sqrt{R_1R_2}}$ où U sont des tensions et R des résistances ;
- $u(t) = e^{-t}$ où u une tension et t un temps ;
- $F = mL\dot{\theta}^2\cos(\theta)$, avec F une force, L une longueur et m une masse.

Déterminer les expressions de :

- la période propre des oscillations d'un pendule simple.
- la vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre.

Un objet se déplaçant à une vitesse v par rapport à un fluide de masse volumique ρ et présentant une aire A à ce fluide, subit une force de trainée F s'opposant à son mouvement. L'influence de la géométrie de l'objet est prise en compte par un coefficient de proportionnalité $\frac{C}{2}$ (sans dimension), le coefficient de trainée.

- Par analyse dimensionnelle du problème, on cherche une expression pour la force de trainée F.

2. Unités

a. L'unité

Pour accéder à la valeur d'une grandeur en physique, on effectue en général une mesure.
Une mesure consiste à déterminer le rapport de deux grandeurs de même nature.
Exemple : mesurer la longueur d'une feuille à l'aide d'une règle.

Pour obtenir une mesure absolue, il faut choisir un étalon qui serve d'unité de référence (plus simplement d'unité) pour le type de grandeur considérée à mesurer.
Une mesure consiste donc à associer un nombre (rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur de référence) + une unité.
Exemple : le mètre est une unité de longueur, ...

b. Le système international

Il y a trop d'unités à définir précisément.
Prenons l'exemple des longueurs, on peut citer les unités suivantes : inch, yard, pied, pouces, mètres, toise, année-lumière, . . .
On ne définit donc que les unités des grandeurs de base indépendantes les unes par rapport aux autres.

L'ensemble de ces unités forme le "Système International d'unités" (S.I.).

Grandeur de base	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	Cd

c. Unités dérivées

Grandeur dérivée	Nom de l'unité	Symbole	Unité dans le S.I.	Exemples
Force	newton	N	$kg.m.s^{-2}$	Poussée de l'A380 : $1,2.10^6\ N$
Energie	joule	J	$kg.m^2.s^{-2}$	Energie d'un litre d'essence : $40.10^6\ J$
Puissance	watt	W	$kg.m.s^{-3}$	Centrale nucléaire : $1.10^9\ W$ Eolienne : $3.10^5\ W$
Pression	pascal	Pa	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	Pression sur Terre : $101325\ Pa$ et sur Mars : $600\ Pa$
Charge électrique	coulomb	C	$s.A$	Charge d'une batterie de téléphone portable : $3000\ C$, Charge d'un électron : $-e = -1,6.10^{-19}\ C$
Différence de potentiels	volt	V	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$	Orage : $15.10^6\ V$
Résistance	ohm	Ω	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}$	Résistance usuelle en électronique : 1 à $10^6\ \Omega$

Remarque : on associe parfois une unité à une grandeur adimensionnée. C'est notamment le cas des angles qui peuvent s'exprimer en radians, en degrés, ...

d. Préfixes des unités

Facteur	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}
Préfixe	femto	pico	nano	micro	milli	kilo	mega	giga	tera
Symbole	f	p	n	µ	m	k	M	G	T

e. Exercice

Convertir :

- $6{,}44\ L$ en dm^3
- $25°C$ en K
- $4{,}2\ mol$ en nombre de molécules
- $1500\ tr.min^{-1}$ en Hz, en $rad.s^{-1}$
- $12\ mol.L^{-1}$ en $mmol.cm^{-3}$
- $0{,}98\ g.L^{-1}$ en kg. m^{-3}
- 15° en radian
- $3{,}12\ km/h$ en m/s