Programme de colle semaine 1

1 Conseils, déroulement et notation des colles

La colle dure une heure. Vous passez par groupe de trois (ou deux voire quatre). Notez bien votre nom au tableau.

La colle débute par des (ou une) question(s) question de cours. Ces questions de cours seront détaillées chaque semaine dans le programme de colle.

L'examinateur vous mettra automatiquement une note strictement inférieure à 10 si le cours n'est pas su, et, plus précisément, n'hésitera pas à mettre une note extrêmement faible si le "collé " n'a manifestement rien fait pour préparer sa colle. **Si le cours est su la note est alors supérieure ou égale à 10**. Viennent ensuite des (ou un) exercice(s) de difficulté croissante. Les notes de colle seront mises dans la semaine par les examinateurs sur le site de la classe, donc, vous pourrez, individuellement, les consulter. Le barème précis donné aux colleurs est le suivant:

- note < 8: tout à fait exceptionnel (cours non su et problème d'attitude).
- note $\in \{8, 9\}$: cours non su.
- note $\in \{10, 11, 12\}$: cours su, pas grand chose dans l'exercice.
- note $\in \{3, 14, 15\}$: cours très bien su, exercice en bonne part résolu.
- note > 15: cours très bien su, exercice bien réussi.

Mais parlons un peu d'autre chose que des notes! La colle est un **moment privilégié** où vous avez, rien que pour vous trois, un professeur. Profitez-en bien! N'hésitez pas à poser des questions qui n'auraient pas été comprises, et, surtout, ne restez pas coincés sur un exercice. Vous êtes nombreux en classe, donc, c'est le moment de vous entraîner à l'épreuve orale de mathématiques, soyez à l'aise, exprimez-vous bien, même si vous ne savez pas répondre à la question posée (sauf le cours), vous pouvez donner les directions dans lesquelles vous avez cherché et même expliquer pourquoi elles n'ont pas abouti. On attend de vous une démarche scientifique, critique, intelligente en somme!

2 Chapitres au programme: "Rudiments de logique": cours et exercices et "Calculs algébriques": uniquement une question de cours

2.1 "Rudiments de logique"

Connaître la table de vérité des principaux connecteurs (paragraphe 1.3 du poly). Savoir que, si P et Q sont deux assertions, l'implication, $P \Longrightarrow Q$ est définie comme étant l'assertion $\rceil P \vee Q$. Savoir prendre la négation d'une assertion. Connaître les quantificateurs universel et existentiel et les exemples de raisonnements classiques (par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence). Savoir faire les exercices suivants:

- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs
  1. *la fonction f est positive.*
  2. *La fonction f s'annule.*
- *Soient a et b deux entiers naturels. On suppose que:*

  $$(\exists x \in \mathbb{N},\ a = bx) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N},\ b = ax).$$

  Montrer que $a = b$.

- Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendantes d'une variable $x \in E$. Compléter

$$(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \cdots\cdots (\forall x \in E,\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x))$$

$$(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \cdots\cdots (\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x))$$

- *Donner la négation des assertions suivantes:*
  1. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \epsilon$.
  2. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.
- *Prouver que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*
- Montrer que toute fonction réelle d'une variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- *Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.*

2.2 Calculs algébriques: poser une question de cours uniquement!

2.2.1 Sommes et produits

Comprendre la notion d'indice muet. Savoir ce que signifie, pour tout entier naturel n, factorielle n notée $n!$. Savoir effectuer des changements d'indice. Connaître le somme des termes d'une suite géométrique, arithmétique. Reconnaître et savoir déterminer très rapidement des sommes ou produits télescopiques. Sommes doubles, sommes triangulaires.

Savoir factoriser, pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n$ par $a - b$.

Savoir faire les exercices suivants:

- *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k \in [\![1;2n]\!],\ k \text{ pair}} k\ ,\quad \prod_{k \in [\![1;2n]\!],\ k \text{ pair}} k\ ,\quad \sum_{k \in [\![1;2n+1]\!],\ k \text{ impair}} k\ ,\quad \prod_{k \in [\![1;2n+1]\!],\ k \text{ impair}} k.$$

- *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\ \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
- Calculer: $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\ ;\ \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)\ ;\ \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
- Calculer: $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}\ ;\ \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)\ ;\ \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$

2.2.2 Coefficients binomiaux, formule du binôme

Pour les colleurs: attention! Aucun lien n'a, pour l'instant, été fait avec la combinatoire. Il ne s'agit donc ici que de calcul, pas de nombre de sous-ensembles d'un ensemble à tant d'éléments.

Connaître la définition (donc avec des factorielles) des coefficients binomiaux, les principales propriétés.

Savoir énoncer et démontrer: les formules de Pascal et du binôme de Newton.

Savoir faire: Calculer

- $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$
- En déduire $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.