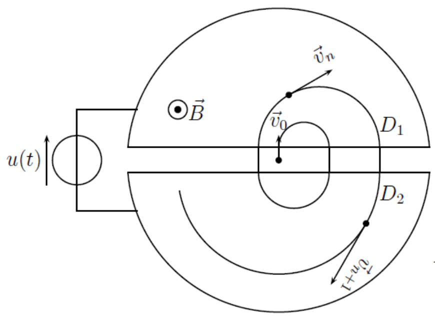
TD Mouvement de particules chargées

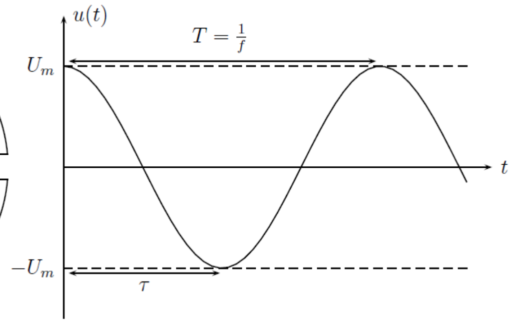
Exercice 1 : Sélecteur de vitesse (131)

1. La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz. Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé si son vecteur accélération est nul, c'est-à-dire d'après la loi de la quantité de mouvement si la force de Lorentz est nulle.
   Donc $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$
   Ici $E_0\overrightarrow{u_y} + v_0\overrightarrow{u_x} \times B_0\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$ donc $E_0 - v_0B_0 = 0$
2. On peut utiliser la contraposée de la question précédente : si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $v_0\overrightarrow{u_x}$ alors elle est déviée. En plaçant par exemple un masque en sortie de la zone de champ, on peut ne garder que les particules passant par un trou accessible seulement si elles ont la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ et bloquer les autres.

Exercice 2 : Cyclotron (129, 130, 131, 132, 133)

1. $\frac{|\overrightarrow{F_L}|}{|\overrightarrow{F_{grav}}|} = \left|\frac{q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}{mg}\right| = \frac{10^{-19}}{10^{-26}}\left|\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right| = 10^7\left|\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right|$
   Pour des valeurs usuelles telle que : $E = 10^3 V.m^{-1}$, $v = 10^6 m.s^{-1}$et $B = 1T$. On a $|\overrightarrow{F_L}| \gg |\overrightarrow{F_{grav}}|$.
2. À l'intérieur des "Dee", seule la force $\overrightarrow{F_m} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ agit sur le proton. Cette force étant normale au déplacement à tout instant, elle ne travaille pas, sa puissance est nulle. D'après le théorème de la puissance cinétique on a $\frac{d}{dt}(E_c) = P(\overrightarrow{F_m}) = 0$. Alors la vitesse est constante.
3. La trajectoire des protons est un arc de cercle, c'est d'ailleurs ce que suggère fortement l'énoncé. On se place donc dans le système de coordonnées polaires et on applique le principe fondamental de la dynamique à un proton $m\vec{a} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ alors $m\left(-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}\right) = q(v\overrightarrow{e_\theta} \times B\overrightarrow{e_z})$ donc $R = \frac{mv}{qB}$. La trajectoire circulaire de longueur $L = \pi R$ (un demi tour) est parcourue à la vitesse constante v en un temps $\tau = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB} = 21{,}7\, ns$.
4. Pour que le proton soit accéléré de manière optimale sous la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m cos(\omega t + \phi)$, il faut que $u(t)$ passe de sa valeur maximale ($+U_m$) à sa valeur minimale ($-U_m$) pendant que le proton parcourt un "Dee" (graphe ci-dessous). On a ainsi $\frac{T}{2} = \tau$ alors $f = \frac{qB}{2\pi m} = 23\, MHz$.





5. Nous avons établi une relation liant R_n à v_n la vitesse du proton lors du demi-tour n : $R_n = \frac{mv_n}{qB}$ et $R_{n+1} = \frac{mv_{n+1}}{qB}$. Il reste à obtenir la relation entre n et v_n. L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique semble le plus adapté. En effet, à chaque passage entre les "Dee", les protons sont accélérés et leur variation d'énergie cinétique est $\Delta E_C = W(\overrightarrow{F_e}) = qU_m$. Ainsi, après n passages, la variation d'énergie cinétique est $n\Delta E_C = qnU_m$. En supposant v_0 faible devant les vitesses suivantes, on peut considérer que $E_{Cn} = \frac{1}{2}mv_n^2 = qnU_m$ alors $v_n = \sqrt{\frac{2qnU_m}{m}}$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{2q(n+1)U_m}{m}}$ soit $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$. On en déduit le rapport des rayons des demi cercles consécutifs $\frac{R_{n+1}}{R_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

6. Après un tour, soit $n = 2$ demi tours, d'après les relations précédentes, $v_2 = \sqrt{\frac{4qU_m}{m}}$ et $R_2 = \frac{mv_2}{qB} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{U_m m}{q}} = 6{,}1\ cm$. Après 10 tours, soit $n' = 20 = 10n$ demi-tours, $v_{20} = \sqrt{\frac{20qU_m}{m}} = \sqrt{10}v_2$ et $R_{20} = \frac{mv_{10}}{qB} = \sqrt{10}R_2 = 19{,}2\ cm.$
7. À partir des équations précédentes, $R_N = \frac{mv_N}{qB}$ alors $E_{CN} = \frac{q^2B^2R_N{}^2}{2m} = 2{,}12.10^{-12}J = 13{,}5\ MeV$.
8. En notant $2N$ le nombre de demi tours effectués (et donc le nombre d'accélérations subies parle proton), on a $\Delta E_{CN} = 2qNU_m$ alors $2N = 33$. Le proton a donc effectué 33 tours avant de quitter le cyclotron et percuter la cible.

Exercice 3 : Mouvements (131, 133)

1. Un champ magnétique ne peut que courber les trajectoires sans modifier la norme de la vitesse de la particule. On en déduit qu'elle est soumise à un champ électrique. Si la particule est en mouvement rectiligne accélérée, c'est que son vecteur accélération est toujours colinéaire à son vecteur vitesse. Déduisons-en la direction du champ électrique.

   Avec le PFD on a $m\vec{a} = q\vec{E}$ d'où $|\vec{E}| = \frac{m}{q}a$ et en intégrant $\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m} + \overrightarrow{V_0}$

   Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires tout au long du mouvement, c'est que le champ $\vec{E}$ est de même direction que le vecteur $\overrightarrow{V_0}$.

   On peut alors écrire : $\vec{E} = \frac{ma}{q}\frac{\overrightarrow{V_0}}{V_0}$
2. En définissant le point O comme la position de la particule à $t = 0$, on déduit par intégration de la vitesse :
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}t^2 + \overrightarrow{V_0}t + \vec{0}$$
3. Une trajectoire purement circulaire ne peut être provoquée que par un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. En effet, un champ électrique entraîne nécessairement une déviation des particules chargées dans sa direction. La trajectoire étant contenue dans un plan (xOy), on en déduit que le champ est dirigé selon l'axe z.
4. Le PFD appliqué à la particule donne en projection dans la base polaire donne
$$\begin{cases} -mR_0\dot{\theta}^2 = qR_0\dot{\theta}B \\ mR_0\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$
   Donc, sachant que le mouvement est uniforme, $B = \frac{mv_0}{qR_0}$