

TD Mécanique quantique

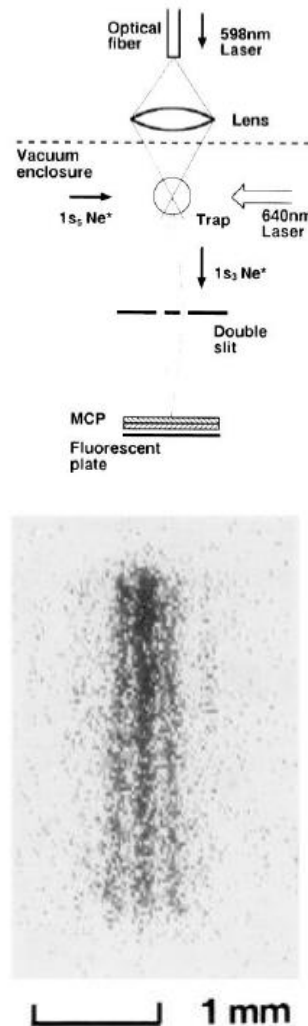
Exercice 1 : Expérience de Shimizu (286, 288)

Cet exercice est basé sur l'article « Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms », publié dans *Physical Review A* le 1er juillet 1992 par les physiciens japonais F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma. Ils ont réalisé une expérience d'interférences avec des atomes de néon dans un dispositif de fentes d'Young représenté ci-contre. Un nuage de quelques millions d'atomes de néon est d'abord capturé dans une cellule à vide (« vacuum enclosure ») puis refroidi à $2,5mK$ dans un piège laser (« trap »). La taille du piège est de l'ordre de 1 mm . Les lasers formant le piège sont alors éteints, ce qui libère les atomes sans vitesse initiale. On peut alors les considérer en chute libre.

Le piège est situé $d = 76mm$ au dessus de deux fentes séparées d'une distance $a = 6\text{ }\mu\text{m}$ (« double slit »). La largeur d'une fente est de $2\text{ }\mu\text{m}$. Un écran MCP (« microchannel plate detector ») est placé à une distance $D = 113mm$ sous la double fente et détecte les atomes de Néon avec une résolution de l'ordre de $20\text{ }\mu\text{m}$.

L'écran MCP enregistre l'impact de chaque atome, un impact étant représenté par un point sur la figure ci-contre.

Ces impacts se distribuent suivant un système de franges semblable à celui obtenu dans le cas des interférences lumineuses ou acoustiques : des zones sombres (beaucoup d'impacts donc flux d'atomes intense), parallèles à la direction des fentes, alternent avec des zones claires (peu ou pas d'impacts donc flux d'atomes faible).



Donnée : Masse molaire du néon : $M = 20\text{ g/mol}^{-1}$

1. Comment se manifestent respectivement les caractères corpusculaire et ondulatoire des atomes de néon dans cette expérience ?
2. En admettant que les atomes se comportent indépendamment les uns des autres, expliquer ce qu'il advient d'un atome de néon lors de sa traversée du dispositif.
3. Estimer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des atomes de néon dans ce dispositif interférentiel.
4. En déduire un ordre de grandeur de la vitesse v des atomes de néon au cours de leur chute. Comparer à la vitesse d'un solide après une chute libre sans vitesse initiale de hauteur h .
5. Que se passe-t-il pour la figure si on bouche un des deux trous ?

Exercice 2 : Atome d'hydrogène (285, 287, 289)

Considérons un atome d'hydrogène. Classiquement il se compose d'un noyau fixe (un proton) et d'un électron de masse m en orbite circulaire. Cet électron est localisé dans une certaine zone de l'espace proche du noyau.

1. Que peut-on en déduire concernant les valeurs possibles pour les énergies de l'électron (ou de l'atome) ?

Pour un atome d'hydrogène, l'énergie potentielle de l'électron à la distance r du noyau est $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ où $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}\text{ F/m}$ est la permittivité du vide et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ la charge élémentaire.

2. Tracer cette énergie et explique son allure.
3. En nommant r la distance typique de localisation de l'électron autour du noyau, estimer l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron en fonction de r .
4. Ecrire l'énergie totale de l'électron en fonction de r .

5. Tracer l'allure de E en fonction de r . En supposant que la stabilité de l'atome dans l'état fondamental impose la valeur a_0 de r rendant E minimale, exprimer a_0 en fonction des autres paramètres.
6. Que penser de l'application numérique ?

On donne $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ et la constante de Planck réduite $\hbar = 1,0 \cdot 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$

Séries spectroscopiques de l'hydrogène :

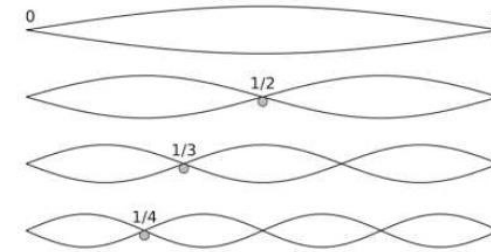
Des décharges électriques dans un tube à vide contenant un gaz à faible pression permet d'étudier l'émission d'ondes électromagnétiques par ce gaz. L'expérience montre que le spectre obtenu est constitué de raies discrètes et n'est pas continu. Rydberg notamment a montré en 1889 que la longueur d'onde émise vérifiait une relation du type $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)$ où $R_H = 1,1 \cdot 10^5 \text{cm}^{-1}$ est la constante de Rydberg et p et q des entiers strictement positifs. Le cas $p = 1$ constitue la série de Lyman (1916) et le cas $p = 2$ la série de Balmer (1885).

7. Expliquer ce qu'il se passe au niveau électronique. On admettra que les décharges électriques peuvent placer un électron dans un état excité.
8. En utilisant la conservation de l'énergie, montrer que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène de la forme $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ sont cohérent avec les résultats expérimentaux. On évaluera E_1 en eV .

Exercice 3 : Corde vibrante (290)

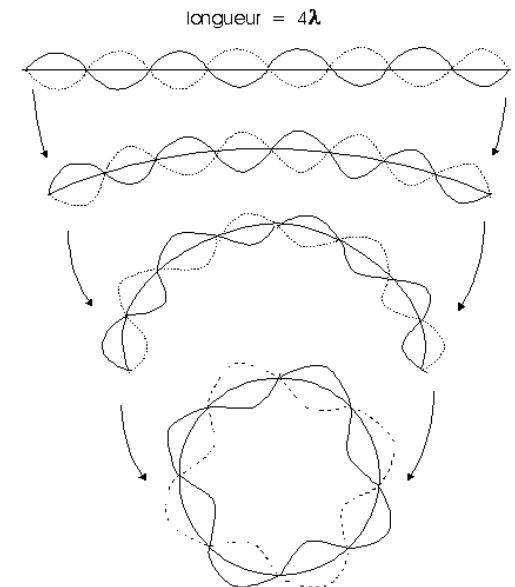
On s'intéresse à une corde dont les deux extrémités sont fixes, comme la corde d'une guitare. On engendre une perturbation périodique au centre de la corde. Pour certaines fréquences d'excitation, on constate que l'amplitude des vibrations de la corde prend une valeur notable : la corde vibre alors dans un mode propre.

La figure ci-dessous donne la représentation des 3 premiers modes propres de vibration :

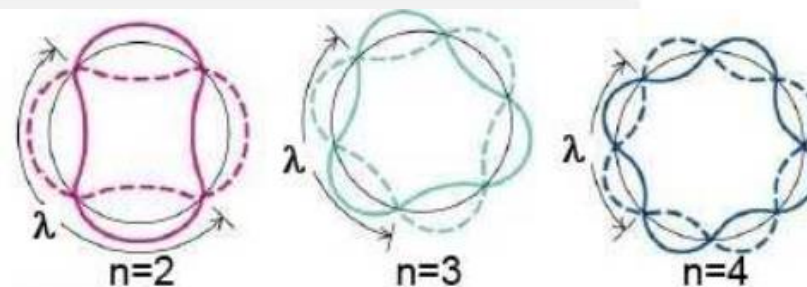
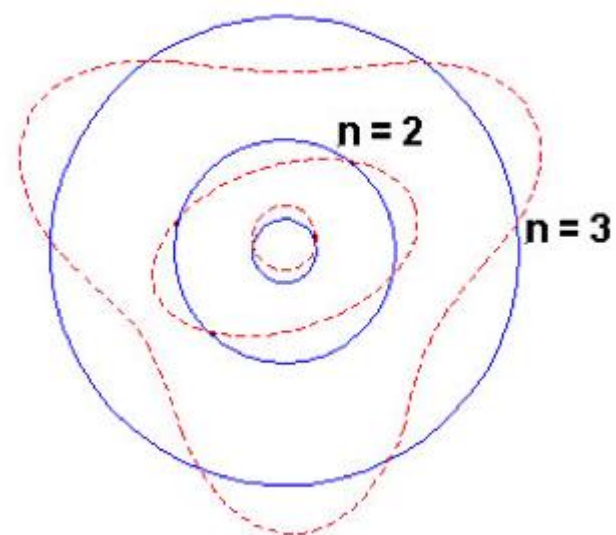


Prenons maintenant le cas de l'atome d'hydrogène et admettons que les trajectoires de l'unique électron sont des cercles autour du noyau. L'onde associée "court autour de la trajectoire avec une fréquence constante (puisque l'énergie est constante)". Pour qu'elle "suive un régime stable" on s'attend à ce qu'elle soit stationnaire (les expressions entre guillemets sont de de Broglie). Il faut qu'elle soit en phase avec elle-même.

On peut se rendre compte de la situation en incurvant une corde vibrante soumise à un régime d'ondes stationnaires telles que sa longueur vaille 4 fois la longueur d'onde. Ces vibrations continueront indéfiniment si la circonférence est un nombre entier de longueurs d'onde. En considérant le comportement des ondes électroniques comme analogues à celles de la corde vibrante circulaire, on peut postuler que l'électron peut circuler indéfiniment autour du noyau sans émettre d'énergie si son orbite contient un nombre entier de longueurs d'onde.



1. Représenter les trois premiers modes de l'onde associée à un électron dans l'atome d'hydrogène.
2. En analogie avec la corde vibrante, donner la relation entre le rayon de la trajectoire de l'électron et sa longueur d'onde.
3. Retrouver la condition de quantification de l'atome de Bohr.



Résolution de problème

On cherche à évaluer la sensibilité de la rétine de l'œil humain en terme de nombre de photons reçues.

La rétine est composée de cellules photosensibles appelées cônes et bâtonnets. En vision nocturne, la pupille de l'œil s'ouvre pour atteindre un diamètre de 4 mm et la sensibilité des bâtonnets augmente énormément. On peut alors voir de façon continue à l'œil nu des étoiles dont la puissance lumineuse est supérieure ou égale à $10^{-14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$.



On rappelle qu'une excitation de la rétine persiste pendant 0,1 s (phénomène de persistance rétinienne).

- Combien de photons émis par une étoile de très faible intensité lumineuse la rétine perçoit-elle par unité de temps?
- Estimer alors la sensibilité de la rétine en terme de nombre de photons reçus. Commenter

Oral de concours : TPE EIVP 2017

Soit une particule de masse m telle que :

$$\psi(x, t) = K \cdot \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2 - i\frac{\hbar\omega_0}{2}t\right)$$

1. Calculer K .
2. Peut-on parler d'état stationnaire ?
3. Donner l'expression de l'énergie E de la particule, et de son énergie potentiel $V(x)$. Donner un exemple pour $V(x)$.

On rappelle l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

On donne l'intégrale $I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$