Exercices d'entraînement et de réflexion à destination des entrants en classe prépa

2024 – 2025

Nous devons la totalité du document présent à un ami et collègue enseignant à Nantes, Lionel Chaussade, et j'en fais profiter mes étudiants avec son aimable autorisation.

Il vous sera utile pour réviser et consolider les méthodes calculatoires introduites au lycée voire avant, mais aussi pour vous familiariser avec quelques techniques plus délicates, revues en prépa.

Vous y trouverez des exercices d'entraînement pur, certains fastidieux mais indispensables à maîtriser, d'autres plus délicats sont signalés par une $\star$.

Je vous en communiquerai aussi les corrections, un peu plus tard, mais dites-vous bien qu'il est inutile de seulement lire des corrections de ce type d'exercices. Seule la pratique vous permettra de vous mettre au point. Aussi il est vivement recommandé de n'utiliser les solutions que pour simple vérification.

Si vous repérez une erreur ou une coquille (il en reste peut-être), merci de me le signaler, je transmettrai !

CHAPITRE 1

SIMPLIFICATION D'EXPRESSIONS

Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. David Hilbert.

1.1 Calculs avec les puissances

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les propriétés et les règles de calcul sur les puissances ainsi que le cours sur les suites géométriques.

Exercice 1 QCM.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n + 2^n$?

   ☐ 4^n ☐ 4^{n+1} ☐ 2^{n+1} ☐ 3^n

2. À quoi est égal $\dfrac{4^{12}}{2^{25}}$?

   ☐ $\dfrac{1}{2^{11}}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 2^{-13}

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n \times 2^n$?

   ☐ 2^{2n} ☐ 2^{2+n} ☐ 2^{n^2} ☐ 4^{2n}

4. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n \times 3^m$?

   ☐ 6^{mn} ☐ cela ne se simplifie pas ☐ 6^{n+m} ☐ 5^{m+n}

5. À quoi est égal $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?

   ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}$ ☐ cela ne se simplifie pas ☐ 2

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $(-1)^{-2n-1}$?

   ☐ -1 ☐ 1 ☐ cela dépend de la parité de n ☐ $2n+1$

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 2^{3^2}$
2. $B = (2^3)^2$
3. $C = 2^{3\times 2}$
4. $D = (2^3)^4$
5. $E = (2^4)^3$
6. $F = (3^6)^5 - (9^5)^3$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de $a = 2^n$:

1. $A = 2^{n+3}$
2. $B = 2^{2n+1}$
3. $C = 2^{-2n}$
4. $D = \dfrac{4^{n+1}}{2^{1-3n}}$
5. $E = 2^{n+3} - 2^{2n} + 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2}$
6. $F = (-2)^{2n+3}$
7. $G = \dfrac{1}{(-2)^{3n-2}}$
8. $H = 8^{2n}$

Cours : sommes des termes d'une suite géométrique.

• *Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note* $\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n$. *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

• *Si la somme ne commence pas au terme initial q^0, en prenant $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on a :*

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 ★ Démontrer les formules de l'encadré précédent.

Exercice 5 Soit $n \geq 3$ et $q \in \mathbb{C}$, simplifier $\sum_{k=3}^{n-1} q^k$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 7 ★ Simplifier $\sum_{k=1}^{100} (2a^{3k+1} + 2)$ où $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 ★ En distinguant plusieurs cas, écrire sous forme algébrique $\sum_{k=0}^{n} i^k$ où $i^2 = -1$.

1.2 Fractions

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes où x, y, z et t sont des réels non nuls dès qu'ils apparaissent au dénominateur.

1. $A = \dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}}$
2. $B = \dfrac{xy + xz}{xt}$
3. $C = \dfrac{(xy)(xz)}{xt}$
4. $D = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}$
5. $E = \dfrac{\frac{26}{18} \times \frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$
6. $F = 3 \times \dfrac{24}{5} \times \dfrac{15}{16}$
7. $G = \dfrac{3 + \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{9}}$
8. $H = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$
9. $I = \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{15} + \dfrac{5}{6}$
10. $J = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$
11. $K = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{12} - \dfrac{4}{9}$
12. $L = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{4}\right) \times \left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{21}{6}\right)$
13. $M = \dfrac{(-18)^3 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$
14. $N = \dfrac{\frac{4}{25} - \frac{4}{15}}{\frac{3}{10} - \frac{1}{15}}$
15. $O = \dfrac{\frac{4x^2+1}{5x} - 1}{\frac{1}{x} - x}$

Exercice 10 ★ Que pensez-vous de l'égalité suivante ?

$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24}$$

Cours : décomposition en éléments simples.

• *Il est possible d'écrire certaines fractions sous la forme d'une somme ce qui permet de simplifier les calculs, on dit que l'on a décomposé la fraction en éléments simples. Voyons la méthode sur un exemple.*

On considère la fraction $\dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$.

- ▶ *On cherche les racines du dénominateur, ici il s'agit de* 1 *et* 2.
- ▶ *On va pouvoir alors décomposer la fraction sous la forme :*

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

où a et b *sont deux réels à déterminer.*

- ▶ *On réduit au même dénominateur le membre de droite.*

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

- ▶ *On identifie les numérateurs, sachant que les dénominateurs sont égaux puisque* $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$:

$$2 = a(x-2) + b(x-1) = (a+b)x - 2a - b$$

On identifie enfin les coefficients des polynômes obtenus (c'est-à-dire les coefficients "devant x" et les coefficients constants) cela nous donne un système que l'on résout sans problème :

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ -2a - b &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2 \\ b &= 2 \end{cases}$$

- ▶ *On conclut :*

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

• *En cours d'année, nous généraliserons cette méthode et nous verrons des techniques plus efficaces pour mener les calculs.*

Exercice 11 Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}$. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 12 ★ Adapter la méthode précédente pour décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x^3-2x^2-3x}$.

Exercice 13 ★ À l'aide d'une décomposition en éléments simples, démontrer que la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

est majorée par 1.

1.3 Identités remarquables

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les techniques pour développer et factoriser des expressions à l'aide d'identités remarquables.

Exercice 14 Simplifier les expressions suivantes où x, y et z désignent des réels.

1. $A = (x-y)^2 + (x+y)^2$
2. $B = (x+y)^2 - (x-y)^2$
3. $C = (x+y-z)^2 - (x-y-z)^2$
4. $D = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$
5. $E = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
6. $F = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$
7. $G = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$
8. $H = (x^3+2x^2+3x+1)(x^3-2x^2+3x-1)$

Remarque. *Dans l'exercice précédent, nous avons pris x, y et z des réels mais les identités remarquables sont valables également pour des nombres complexes.*

Exercice 15 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité suivante :

$$(x-y\sqrt{2})^2(x+y\sqrt{2})^2 \leq x^4 + 4y^4$$

À quelle condition a-t-on l'égalité ?

Exercice 16 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.
2. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Développer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.
2. Développer $C = (3-2\sqrt{3})^3$.

Exercice 18 ★ Soit $x \in \mathbb{R}$, en faisant apparaître des identités remarquables, factoriser :

1. $x^4 + x^2 + 1$
2. $x^8 + 1$

Exercice 19 Démontrer ce cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

Exercice 20 Soient x et y deux réels, compléter les factorisations suivantes :

1. $x^3 - y^3 = (x-y)(\dots)$
2. $x^3 + y^3 = (x+y)(\dots)$
3. $x^4 - y^4 = (x-y)(\dots)$
4. En déduire : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Exercice 21 ★ Soient m et n deux entiers naturels qui s'écrivent chacun comme une somme de deux carrés d'entiers naturels. Démontrer que mn s'écrit également comme une somme de deux carrés d'entiers naturels.

Cours : méthode de la quantité conjuguée.

• *Cette méthode permet de réécrire certaines expressions qui mettent en jeu des racines carrées. Voyons un exemple.*

On considère le quotient $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. *On multiplie et on divise par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire :*

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Ceci en utilisant une identité remarquable au dénominateur.

• *Cette méthode permet de lever des indéterminations dans le calcul de limite. Par exemple, si l'on souhaite calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$, *on peut transformer l'expression ainsi pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{x^2+1} - x = (\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Sous cette forme là, la limite n'est plus indéterminée et vaut 0.

Exercice 22 Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{3\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}}$
2. $B = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$
3. $C = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Exercice 23 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x + 1$

Remarque. *Vous avez certainement remarqué que cette méthode est analogue à celle qui permet d'écrire un nombre complexe, présenté sous la forme d'un quotient, sous forme algébrique. Par exemple, pouvez-vous écrire* $\dfrac{2-i}{3+2i}$ *sous forme algébrique ?*

1.4 Factorielle

Cours : la factorielle.

La notation $n!$, qui se lit "factorielle n", désigne le produit $1 \times 2 \times ... \times n$. Par convention $0! = 1$. Cette notation nous sera particulière utile, notamment quand nous allons étudier les coefficients binomiaux car pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 24 QCM.

1. Que vaut $5!$?

   ☐ 25 ☐ 24 ☐ 120 ☐ 240

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dfrac{(n+2)!}{n!}$?

   ☐ 2 ☐ $2n+3$ ☐ $n+2$ ☐ $(n+2)(n+1)$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n$?

   ☐ $\dfrac{(2n)!}{n!}$ ☐ $2(n!)$ ☐ $2^n(n!)$ ☐ $(2n)!$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$?

   ☐ $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)}$ ☐ $\dfrac{n!}{2^n(2n)!}$ ☐ $\dfrac{(2n)!}{n!}$ ☐ $(2n-1)!$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à quoi est égal $\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!}$?

   ☐ $\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$ ☐ $\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$ ☐ $\dfrac{-n}{n(n+1)(n+1)!}$ ☐ $\dfrac{-1}{(n+1)(n+1)!}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $\dbinom{n}{2}$?

   ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ☐ $\dfrac{n}{2(n-2)}$ ☐ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ☐ $\dfrac{n-1}{2}$

Exercice 25 ★ Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$
2. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{2^n}$

Exercice 26 À l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice conjecturez la valeur de :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e^n(n!)}{n^n}\right)^2 \times \frac{1}{2n}$$

Ne cherchez pas à démontrer votre conjecture.

CHAPITRE 2

FONCTIONS USUELLES

Un mathématicien ce n'est pas quelqu'un qui passe son temps à faire des calculs, c'est quelqu'un qui trouve des techniques pour ne pas avoir à les faire.

2.1 Trinôme du second degré

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les formules donnant les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels selon le signe du discriminant.

Exercice 27 ★ Démontrer les formules donnant les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels dans le cas où le discriminant est positif ou nul.

Exercice 28 Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$. On pourra trouver les racines du numérateur et du dénominateur.

Exercice 29 Trouver tous les réels x solutions des équations suivantes :

1. $(x-1)(x-3) = 1$
2. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
3. $\dfrac{x+7}{x-2} + \dfrac{4x-2}{x-5} = 5$
4. $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$
5. $\dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{x-1} = 1$
6. ★ $e^{-x} - 5 = e^x$

Exercice 30 Quel est le maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a < 0$? Même question avec le minimum.

Cours : signe d'un trinôme du second degré.

Soient a, b et c des réels, on rappelle que si α et β sont les deux racines réelles ou complexes du trinôme $ax^2 + bx + c$ (éventuellement $\alpha = \beta$ en cas de racine double), on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Cette factorisation nous permet de trouver le signe du trinôme selon le discriminant Δ :

• *si $\Delta > 0$ le trinôme est du signe de $-a$ entre les deux racines réelles et du signe de a à l'extérieur de l'intervalle délimité par les racines.*

• *si $\Delta \leq 0$ le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 31 Trouver tous les réels x solutions des inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
2. $x^2 \geq x$
3. $x^2 - 2x + 3 > 0$
4. $25 \leq (x-2)^2 \leq 36$
5. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{-x+2}{x-3}$
6. ★ $x + \sqrt{x+1} < 11$

2.2 Fonctions polynomiales

Cours : racines et factorisation pour une fonction polynomiale.

• *Une fonction polynomiale est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où les a_k sont des nombres réels et $n \in \mathbb{N}$ est le degré de la fonction polynomiale.

• *Si a est un réel ou un complexe solution de l'équation $f(x) = 0$ alors il est possible de factoriser $f(x)$ par $(x - a)$. Prenons par exemple, la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^3 + 2x + 3$$

On remarque que -1 est solution évidente, c'est-à-dire que $f(-1) = 0$, ainsi on peut factoriser l'expression $f(x)$ par $x + 1$. La factorisation peut se trouver de tête en complétant de proche en proche la seconde parenthèse :

$$x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3)$$

À présent, on peut trouver les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$, qui seront complexes, à l'aide du polynôme de degré 2 restant.

• *Si vous ne parvenez pas à trouver de tête la factorisation, vous pouvez poser des coefficients inconnus α, β et γ pour obtenir :*

$$f(x) = (x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

En développant et en identifiant, on trouve α, β et γ.

Exercice 32 En trouvant une solution évidente, trouver tous les réels x vérifiant l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Exercice 33 Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ peut-on mettre en facteur $x - 2$ dans la fonction polynomiale suivante ?

$$f(x) = 3x^3 - ax^2 + 2x - 4$$

Avec cette valeur de a, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 34 ★ Montrer que l'équation suivante possède une unique solution réelle :

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 0$$

2.3 Exponentielle et logarithme

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les principales propriétés des fonctions exponentielle et logarithme et faire l'étude de ces fonctions. Revoir également les limites remarquables qui mettent en jeu ces fonctions.

Exercice 35 Vrai ou faux.

	V	F
1. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $e^{x+y} = e^x e^y$	☐	☐
2. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	☐	☐
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = -e^x$	☐	☐
4. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $e^{xy} = e^x + e^y$	☐	☐
5. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$	☐	☐
6. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$	☐	☐
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\ln(x)}$	☐	☐
8. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sqrt{\ln(x)}$	☐	☐
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$	☐	☐
10. $e^{\ln(5)} + e^{-\ln(3)} = 2$	☐	☐
11. $e^{\frac{1}{2}\ln(4)} + e^{-\ln(\frac{1}{2})} = 4$	☐	☐
12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$	☐	☐
13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln((x^3+1)^2) = 2\ln(x^3+1)$	☐	☐
14. $\ln(e^{-2}) = -2$	☐	☐
15. L'unique solution de l'équation $\ln(x+2) = 1$ est $x = e + 2$	☐	☐

Exercice 36 QCM.

1. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\ln(x+1) - \ln(x)$?

   ☐ $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ 0 ☐ $-\ln(x)$

2. À quoi est égal $\ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6)$?

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ e ☐ cela ne se simplifie pas

3. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\sqrt{\ln(x)}$?

   ☐ $\dfrac{1}{2}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ☐ cela ne se simplifie pas ☐ $\ln(\sqrt{x})$

4. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\ln(x^{\frac{4}{3}})$?

   ☐ $\dfrac{1}{3}\ln(x)$ ☐ $\dfrac{4}{3}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \ln(x)$ ☐ $x\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

5. Soient x et y deux réels, à quoi est égal e^{xy} ?

   ☐ $e^x + e^y$ ☐ $e^x e^y$ ☐ cela ne se simplifie pas ☐ e^{x+y}

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $\dfrac{1}{e^x}$?

☐ $e^{\frac{1}{x}}$ ☐ e^{-x} ☐ cela ne se simplifie pas ☐ $-e^x$

7. Le réel $(\ln(4)) \times \ln(\sqrt{2})$ est égal à :

   ☐ $\ln(4+\sqrt{2})$ ☐ $\ln(4\sqrt{2})$ ☐ $\ln(2)$ ☐ $(\ln(2))^2$

8. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(e^n) - 2e + \ln(1)$ est égal à :

   ☐ $e^n - 2e + e$ ☐ $e^n - 2e$ ☐ $n - 2e$ ☐ $n - 2e + 1$

9. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$ est égal à :

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ 4 ☐ $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

Exercice 37 Exprimer à l'aide de ln(2) et ln(3) :

1. $A = \ln(96)$
2. $B = \ln(6^5)$
3. $C = \dfrac{1}{\ln(12)}$
4. $D = \ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$
5. $E = \ln(18 \times 36)$
6. $F = \ln(12 + 36)$

Exercice 38 Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} xe^x$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$
11. $\lim\limits_{x\to 3} x\ln(x)$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)$
15. $\lim\limits_{x\to -1} x\ln(x)$
16. ★ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

Exercice 39 Résoudre les équations ou les inéquations suivantes :

1. $e^{2x+1} = 3$
2. $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$
3. $\ln(\ln(x)) < -2$
4. $e^{x^2+6} \leq e^{5x}$
5. $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(2)$
6. ★ $(\ln(x))^2 + \dfrac{1}{(\ln(x))^2} = 2$
7. ★ $2\ln(x) + \ln(x+1) \geq \ln(x^3 - x^2 + x)$
8. $\dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \geq 1$

Exercice 40 ★ On pose $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté D_f.
2. Montrer que la fonction f est impaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

2.4 Valeur absolue

Cours : fonction valeur absolue.

• *La fonction valeur absolue est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

• *L'une des erreurs les plus fréquentes en début de MPSI est d'écrire $\sqrt{x^2} = x$, vous pouvez prendre des exemples jusqu'à être parfaitement convaincu que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exercice 41 Tracer la fonction valeur absolue. Quelle est la particularité au point $x = 0$?

Exercice 42 Simplifier :

$$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$$

Exercice 43 Trouver tous les réels x vérifiant les inégalités suivantes :

1. $|x| = 36$
2. $|x| \leq 4$
3. $|x| > 7$
4. $2 \leq |x| < 5$
5. $|x-2| \leq 9$
6. $|x+1| \geq 4$
7. $|x+1| = |x-2|$
8. ★ $|x^2 - 5x| = 4$

Exercice 44 Quelles assertions traduisent la relation $|x-a| \leq \varepsilon$ où x, a et ε sont des réels avec $\varepsilon > 0$?

1. $-\varepsilon \leq x - a \leq \varepsilon$
2. $\varepsilon \leq x - a \leq -\varepsilon$
3. $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$
4. $\varepsilon - a \leq x \leq a + \varepsilon$

Exercice 45 Résoudre les équations ou les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x| = -x$
2. ★ $\sqrt{|x+3|} = x + 4$
3. ★ $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1$
4. ★ $|x+1| - |2x-1| \leq 1$

CHAPITRE 3

EQUATIONS ET INÉQUATIONS

Ever Tried. Ever Failed. No Matter. Try again. Fail again.
Fail better. Samuel Beckett.

3.1 Équations

Remarque. *Il y a une grande variété d'équations et nous avons vu de nombreux exemples dans les paragraphes précédents, en voici quelques unes supplémentaires.*

Exercice 46 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\dfrac{3}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-x}$
2. ★ $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$
3. $\dfrac{1}{x} = x^2$
4. ★ $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 47 On considère l'équation $\sqrt{3x^2-1} = x$. Critiquer et corriger la résolution suivante :

$$\sqrt{3x^2-1} = x \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.2 Manipulation des inégalités

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les techniques de manipulation d'inégalités.

Exercice 48 Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont fausses, donner un contre-exemple en choisissant des valeurs pour les variables mises en jeu.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a < b$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a < b \Rightarrow a \leq b$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: ($a \leq b$ et $c \leq d$) $\Rightarrow a + c \leq b + d$.
5. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c$.
6. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: ($a \leq b$ et $c \leq d$) $\Rightarrow a - c \leq b - d$.
7. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: ($a \leq b$ et $c < d$) $\Rightarrow a + c < b + d$.
8. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: ($a \leq b$ et $c < d$) $\Rightarrow a + c < b + d$.
9. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: ($a \leq b$ et $c \geq d$) $\Rightarrow a - c \leq b - d$.
10. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.
11. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

12. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$: $a < b \Rightarrow ac < bc$.
13. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b$ et $c \leq d) \Rightarrow ac \leq bd$.
14. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: $(0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d) \Rightarrow ac \leq bd$.
15. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \leq 0$ et $c \leq d \leq 0) \Rightarrow ac \leq bd$.
16. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \leq 0$ et $c \leq d) \Rightarrow ac \geq bd$.
17. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$: $(a \leq 0 \leq b$ et $c \leq 0 \leq d) \Rightarrow ac \leq bd$.
18. Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$: $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
19. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.
20. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.
21. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq b^2$.
22. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$.
23. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3$.
24. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$: $a \leq b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.
25. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$: $0 < a \leq b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.
26. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$: $a \leq b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.
27. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$: $(a \leq b$ et $c \geq d) \Rightarrow \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{d}$.
28. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$: $(0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d) \Rightarrow \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{d}$.
29. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$: $(0 < a \leq b$ et $0 < d \leq c) \Rightarrow \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{d}$.

Exercice 49 Soient x et y deux réels avec $2 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y < -3$. Donner un encadrement de $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice 50 Soit $x \in \mathbb{R}$, comparer x et x^2.

Exercice 51 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2}{x} < 1$$

Exercice 52 Rappeler la définition d'une fonction croissante, décroissante, strictement croissante et strictement décroissante. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ? (a et b sont deux réels de l'ensemble de définition de f)

1. Si f est croissante alors $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$
2. Si f est strictement croissante alors $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$

Exercice 53 ★ Soient a, b, c, d, a', b', c' et d' des réels strictement positifs. L'implication suivante est-elle correcte ? Si oui, démontrer-là, sinon trouver un contre-exemple.

$$\left(\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}\right) \Rightarrow \frac{a+a'}{b+b'} \leq \frac{c+c'}{d+d'}$$

3.3 Inéquations

Remarque. *Lors de la résolution d'une inéquation, on fera surtout attention lorsque l'on multiplie une inégalité par une expression qui dépend de x. En effet, le sens de l'inégalité peut changer selon le signe de l'expression par laquelle on multiplie.*

Exercice 54 Trouver les réels x solutions des inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x+1}{x-5} \geq 0$
2. $\sqrt{x^2+1} \geq x$
3. ★ $x-1 < \sqrt{x+2}$
4. ★ $\sqrt{|x-3|} \leq x-1$

3.4 Systèmes

Exercice 55 Trouver tous les réels x et y solutions des systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 5 \\ -4x+7y & = & 3 \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 5 \\ -4x+6y & = & -10 \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 5 \\ -4x+6y & = & -12 \end{array}\right.$

Exercice 56 Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} x+10y-3z & = & 5 \\ 2x-y+2z & = & 2 \\ -x+y+z & = & -3 \end{array}\right.$

CHAPITRE 4

TRIGONOMÉTRIE

L'essence des mathématiques, c'est la liberté. Georg Cantor.

Cours : guide de survie en trigonométrie.

- *Voici quelques formules de trigonométrie, à connaitre parfaitement. On considère deux réels a et b.*
- ***Pythagore :*** $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$
- ***Angles opposés, complémentaires, supplémentaires.***

$\cos(a+2\pi)=\cos(a)$	$\sin(a+2\pi)=\sin(a)$	$\cos(-a)=\cos(a)$	$\sin(-a)=-\sin(a)$
$\cos(a+\pi)=-\cos(a)$	$\sin(a+\pi)=-\sin(a)$	$\cos(\pi-a)=-\cos(a)$	$\sin(\pi-a)=\sin(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin(a)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos(a)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$

Vous pouvez essayer de retrouver ces formules à l'aide du cercle trigonométrique.

- ***Valeurs remarquables.***

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(a)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- ***Duplication et linéarisation.***

$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a) \qquad \cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a)=2\cos(a)\sin(a) \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

- ***Formules d'addition.***

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

- ***Équations trigonométriques.***

$$\cos(a)=\cos(b)\Leftrightarrow a\equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a\equiv -b\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \sin(a)=\sin(b)\Leftrightarrow a\equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a\equiv \pi-b\ [2\pi]$$

La notation $a\equiv b\ [2\pi]$ signifie qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=b+2k\pi$.

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les éléments de trigonométrie vu au lycée, l'étude des fonctions cosinus et sinus ainsi que l'interprétation géométrique à l'aide du cercle trigonométrique.

Exercice 57 Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, à l'aide du formulaire précédent, donner des formules pour :

1. $\cos(a - b)$
2. $\sin(a - b)$
3. $\cos(a)\cos(b)$
4. $\sin(a)\sin(b)$
5. $\sin(a)\cos(b)$
6. $\cos(a + b + c)$
7. $\cos(a) + \cos(b)$
8. $\sin(a) - \sin(b)$

Exercice 58 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux façons différentes :

1. En utilisant l'une des formules de linéarisation et développement.
2. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 59 Donner les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
5. $\cos\left(\frac{27\pi}{3}\right)$
6. $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

Exercice 60 La fonction tangente est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Compléter le tableau des valeurs remarquables avec celles de la fonction tangente.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente, noté D. Démontrer que la fonction tangente est π-périodique (c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, on a : $\tan(x + \pi) = \tan(x)$) et impaire.
3. Démontrer que :
$$\forall x \in D,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$
Finir l'étude de la fonction tangente et faire la représentation graphique.
4. Soient $a \in D$ et $b \in D$ avec $a + b \in D$, démontrer que :
$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$
5. ★ Soit $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{2} \in D$, démontrer que :
$$\cos(\alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Exercice 61 Trouver tous les réels x vérifiant les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\cos(x) = \sin(x)$
4. $\cos(x)\sin(3x) = 0$
5. ★ $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
6. ★ $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) = 1$

Exercice 62 Trouver tous les réels x vérifiant les équations suivantes, on pourra s'aider du cercle trigonométrique :

1. $\cos(x) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(x) < -\dfrac{1}{2}$
3. $-\dfrac{1}{2} < \sin(2x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. ★ $\cos(x) > \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 63 Résoudre l'équation : $\sqrt{2}\cos(x)+\sqrt{6}\sin(x) = 2$. On pourra commencer par factoriser le membre de gauche par $2\sqrt{2}$ et reconnaître une formule de trigonométrie.

CHAPITRE 5

NOMBRES COMPLEXES

On ne peut plus expliquer le monde, faire ressentir sa beauté à ceux qui n'ont aucune connaissance profonde des mathématiques.
Richard Feynman.

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir le cours de terminale sur les nombres complexes.

Exercice 64 QCM.

1. À quoi est égal i^7 ?

   ☐ 1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ -1

2. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$?

   ☐ $5+5i$ ☐ $-7+5i$ ☐ $-5-5i$ ☐ $-7-5i$

3. À quoi est égal $\dfrac{1}{i}$?

   ☐ i ☐ $-i$ ☐ $1-i$ ☐ $-1+i$

4. À quoi est égal $\dfrac{1}{-1-i}$?

   ☐ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ☐ $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ☐ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

5. À quoi est égal $\dfrac{2-3i}{1+2i}$?

   ☐ $-\dfrac{4+7i}{5}$ ☐ $\dfrac{4-i}{5}$ ☐ $\dfrac{9-7i}{5}$ ☐ $\dfrac{4-7i}{5}$

6. À quoi est égal $(1+i)^3$?

   ☐ $2+2i$ ☐ $2-2i$ ☐ $-2+2i$ ☐ $-2-2i$

7. Quel est le nombre qui élévé au carré vaut i ?

   ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}i$

8. À quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(-1-i)(i-1)$?

   ☐ $16i$ ☐ $-16i$ ☐ 16 ☐ -16

9. Soit $z \in \mathbb{C}$, à quoi est égal $\overline{i(z-1)}$?

   ☐ $i\overline{z}-i$ ☐ $i\overline{z}+i$ ☐ $-i\overline{z}-i$ ☐ $-i\overline{z}+i$

10. Quels sont les nombres complexes z solutions de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$?

☐ i et $-i$ ☐ $1+i$ et $1-i$ ☐ $-1+i$ et $-1-i$ ☐ $2+2i$ et $2-2i$

11. Quels sont les nombres complexes z solutions de l'équation $z^2 + (1-i)z - i = 0$?

☐ 1 et $-i$ ☐ 1 et i ☐ -1 et $-i$ ☐ -1 et i

12. Quel est le module de $\dfrac{1}{-3+4i}$?

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\dfrac{1}{25}$ ☐ $\dfrac{1}{5}$

13. À quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{6}}$?

☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

14. À quoi est égal $-e^{i\frac{\pi}{6}}$?

☐ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ☐ $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

15. À quoi est égal $e^{7i\frac{\pi}{2}}$?

☐ 1 ☐ -1 ☐ i ☐ $-i$

16. À quoi est égal $e^{-5i\frac{\pi}{4}}$?

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

17. À quoi est égal $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$?

☐ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $\dfrac{1}{e^{i\theta}}$?

☐ $e^{i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\theta}$ ☐ $-e^{i\theta}$

19. À quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

☐ $e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{\pi}{6}}$

20. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $ie^{i\theta}$?

☐ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta-i\frac{\pi}{2}}$

21. Quelle est la forme trigonométrique de $1 - \sqrt{3}i$?

☐ $\dfrac{1}{2}\Big(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$ ☐ $\dfrac{1}{2}\Big(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$ ☐ $2\Big(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$ ☐ $2\Big(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$

22. Soit z un nombre complexe de module 1, à quoi est égal $\dfrac{1}{z}$?

☐ $\dfrac{1}{\overline{z}}$ ☐ $-z$ ☐ $-\overline{z}$ ☐ $\overline{z}$

23. Quelle est l'image des points du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+i| \leq 2$?

☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

24. ★ Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, à quoi est égal $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$?

☐ $i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ ☐ $-i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ ☐ $i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{4})}{\cos(\frac{\theta}{4})}$ ☐ $2i\dfrac{\cos(\frac{\theta}{4})}{\cos(\frac{\theta}{4})}$

Exercice 65 Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$A = -5 \qquad B = 4 - 4i \qquad C = \frac{1}{-3i} \qquad D = (1 + i\sqrt{3})^7 \qquad E = -\sqrt{3 + \sqrt{2}} + i\sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

Exercice 66 ★ Trouver tous les nombres complexes dont le carré vaut $z = -3 - 4i$.

CHAPITRE 6

CALCULS SUR LES FONCTIONS

Les mathématiques, bien considérées, sont douées non seulement de justesse, mais aussi de suprême beauté. Bertrand Russel

6.1 Dérivées

Cours : dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble de définition**	**Ensemble de dérivabilité**
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cours : dérivées des fonctions usuelles.

I désigne un intervalle réel.

• *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.*

• *Si u est une fonction dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.*

• *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.*

• *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.*

• *La formule qui suit n'est pas explicitement au programme de terminale, mais vous l'avez certainement déjà rencontré dans certains cas particuliers.*
Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur un intervalle J avec pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$ alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

On rappelle que la fonction $v \circ u$ est définie par $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$.
Prenons un exemple afin d'appliquer cette formule. On considère une fonction u strictement positive sur un intervalle I, on cherche une formule pour la dérivée de $\sqrt{u}$. On reconnait la composée $v \circ u$ avec $v : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On a $v' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on applique la formule précédente donnant la dérivée de fonctions composées :

$$(\sqrt{u})' : x \mapsto u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

D'où la formule :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Avec la même méthode, on en déduit les dérivées des fonctions composées présentées dans le tableau qui suit.

Cours : dérivées des fonctions composées.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
$u^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$	en tout point où u est dérivable
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$	en tout point où u est dérivable et non nulle
$\dfrac{1}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	en tout point où u est dérivable et non nulle
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	en tout point où u est dérivable et strictement positive
e^u	$u'e^u$	en tout point où u est dérivable
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	en tout point où u est dérivable et strictement positive
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	en tout point où u est dérivable
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	en tout point où u est dérivable

Exercice 67 Calculer la dérivée des fonctions suivantes. Exceptionnellement, on ne s'intéressera pas à l'ensemble de définition et de dérivabilité, l'objectif étant de s'entraîner au calcul.

$f_1 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ $\qquad f_2 : x \mapsto e^{x^2}$ $\qquad f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^7} - \dfrac{1}{x} + x^{-5}$

$f_4 : x \mapsto (x^2 + x)^3$ $\qquad f_5 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{5}\right)$ $\qquad f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{1 - 2x}$

$f_7 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ $\qquad f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\qquad f_9 : x \mapsto \ln\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 1}$ $\qquad f_{11} : x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ $\qquad f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{(3x^2 - 1)^2}$

$f_{13} : x \mapsto \cos(1 + 4x)$ $\qquad f_{14} : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$ $\qquad f_{15} : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$

$f_{16} : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x^2)}$ $\qquad f_{17} : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)^2}$ $\qquad f_{18} : x \mapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

Exercice 68 Donner l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$ $\quad f_3 : x \mapsto (x^3+x-2)^4$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$ $\quad f_5 : x \mapsto \left(\cos^2(x)+\dfrac{3}{2}\right)\sin(2x)$ $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^4}{x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$ $\quad f_8 : x \mapsto \ln(\ln(x))$ $\quad f_9 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$

$f_{10} : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ $\quad f_{11} : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$ $\quad f_{12} : x \mapsto \sqrt{x^2+6x-1}$

6.2 Primitives

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les primitives des fonctions usuelles.

Cours : formulaire primitives.

Fonction	**Une primitive**	**Domaine de validité**
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(-n+1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Cours : formes à savoir reconnaitre.

• *Le tableau du paragraphe précédent sur les dérivées de fonctions composées peut également se lire à l'envers pour obtenir le tableau ci-dessous, u désigne une fonction à valeurs réelles.*

Fonction	**Une primitive**	**Domaine de validité**
$u'e^u$	e^u	en tout point où u est dérivable
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	en tout point où u est dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	en tout point où u est dérivable et strictement positive
$u'u$	$\dfrac{1}{2}u^2$	en tout point où u est dérivable
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	en tout point où u est dérivable et non nulle
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	en tout point où u est dérivable
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	en tout point où u est dérivable
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	en tout point où u est dérivable

• *Parfois, il faut jouer sur les coefficients pour faire apparaître la forme voulue. Par exemple, cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ de :*

$$f : x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

On vérifie que le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u : x \mapsto x^2+x+1$ et on remarque que $u' : x \mapsto 2x+1$. On va faire apparaître une forme $\dfrac{u'}{u^2}$:

$$f(x) = 2 \times \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$, en tenant compte du coefficient 2, on en déduit qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F : x \mapsto \frac{-2}{x^2+x+1}$$

Exercice 69 Trouver une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{(4+x^2)^2}$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2}{1+4x^3}$ $f_3 : x \mapsto 7\cos(x)\sin^4(x)$ $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x^2+3x+7}$ $f_7 : x \mapsto 2x(3x^2-1)^3$ $f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x-2)^4}$

$f_9 : x \mapsto (6x^2+8)\sin(x^3+4x)$ $f_{10} : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$ $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x^3-2)^2}$ $f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$

$f_{13} : x \mapsto \cos^2(x)$ $f_{14} : x \mapsto \sqrt{5x+4}$ $f_{15} : x \mapsto \dfrac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$ $f_{16} : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$

$f_{17} : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ $f_{18} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ $f_{19} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}$ $f_{20} : x \mapsto \dfrac{x^4}{2+x}$

Cours : intégration par parties.

• *L'intégration par parties est une méthode permettant le calcul d'intégrales, voici l'énoncé du théorème, la preuve et un exemple de cette technique.*

• ***Théorème d'intégration par parties.*** *On considère u et v deux fonctions continues, dérivables et dont les dérivées sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. On a :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Ceci en utilisant la notation classique $\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

• ***Preuve :*** *On utilise la formule de dérivation d'un produit :* $\forall t \in [a, b],\ (uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$, *ce qui donne :*

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt \quad (\bigstar)$$

D'autre part : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$ *puisqu'une primitive de $(uv)'$ est uv. En remplaçant dans la formule $(\bigstar)$ cela donne :*

$$\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

C'est la formule voulue.

• ***Exemple :*** *Si l'on veut calculer* $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}dt$ *à l'aide d'une intégration par parties, voilà comment on rédige.*
On pose :

$$v(t) = t, \quad v'(t) = 1$$
$$u'(t) = e^{2t}, \quad u(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0, 1]$, on applique la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)} \times \underbrace{e^{2t}}_{u'(t)}dt &= \Big[\underbrace{t}_{v(t)} \times \underbrace{\frac{1}{2}e^{2t}}_{u(t)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{v'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{2}e^{2t}}_{u(t)}dt \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \Big[\frac{1}{4}e^{2t}\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

Exercice 70 À l'aide d'une intégration par partie, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 2t + 3)e^t dt$
3. $\displaystyle\int_1^e \ln(t)dt$

6.3 Limites

Avant d'aborder ce paragraphe, on pourra revoir les limites des fonctions usuelles, ainsi que les limites issues de taux de variations. Vous pouvez également faire la liste des formes indéterminées que vous connaissez.

Cours : formes indéterminées.

• *Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :*

$$0\times\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad +\infty-\infty$$

• *Il faut bien comprendre qu'une forme indéterminée est une forme à déterminer, on doit transformer l'expression jusqu'à pouvoir calculer la limite. Certaines indéterminations sont levées par le cours :*

► *Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles :*

-La limite d'une fonction polynomiale en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

-La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus hauts degrés.

► *Nombres dérivées : les limites suivantes sont fournies dans le cours de terminale, elles donnent toutes un nombre dérivé :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

On rappelle que les limites ci-dessus sont issues d'un taux d'accroissement : si f est une fonction dérivable, en a on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

► *Croissances comparées :*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

Exercice 71 Cet exercice présente quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations.

1. En mettant en facteur le terme prépondérant calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1-e^x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x$$

2. En utilisant la méthode de la quantité conjuguée, présentée dans le paragraphe sur les identités remarquables, déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

3. En utilisant un taux d'accroissement, déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$$

Exercice 72 Donner, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x+2}{\ln(x)}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{\ln(x)}$
3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}e^x}{x+1}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \sin(\ln(x))$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
6. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+3)-\ln(3)}{x}$
7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
8. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+2x-4}$
9. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+2x-4}$
10. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$
11. ★ $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$
12. ★ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(x)}$
13. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$
14. $\lim_{x \to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
15. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+x+1}-x$
16. $\lim_{x \to 0} x\ln(2x)$
17. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{2x}$
18. $\lim_{x \to +\infty} e^{x-\sin(x)}$
19. . $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+3)-\ln(3)}{x}$
20. ★ $\lim_{x \to +\infty} x\ln(x)-x\ln(x+2)$
21. $\lim_{x \to 1} x+|x|$

CHAPITRE 7

DIVERS

En mathématiques, c'est comme dans un roman policier ou un épisode de Columbo : le raisonnement par lequel le détective confond l'assassin est au moins aussi important que la solution du mystère elle-même. Cédric Villani.

7.1 Récurrence

Cours : organisation d'une récurrence.

• *On rappelle qu'une récurrence se fait en quatre temps : énoncé de la proposition à démontrer, initialisation, hérédité et conclusion. Prenons un exemple pour voir une rédaction correcte.*

On considère un nombre complexe q et on introduit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Imaginons que l'exercice consiste à démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = q^n u_0$.

Démontrons par récurrence la propriété suivante valable pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{H}(n) \ : \text{"} \ u_n = q^n u_0 \text{"}$$

- ***Initialisation.*** *On a bien $u_0 = q^0 u_0$ puisque $q^0 = 1$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}(0)$ est vraie.*
- ***Hérédité.*** *Fixons un entier naturel n et supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On a alors :*

$$u_{n+1} = qu_n = q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie et termine la récurrence.
On a démontré que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0}$.

• *Il ne faut pas remplacer une récurrence rigoureuse par l'utilisation de trois petits points : "... ", toujours avec le même exercice la rédaction suivante n'est pas correcte :*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = qu_{n-1} = q \times qu_{n-2} = ... = \underbrace{q \times q \times ... \times q}_{n \text{ fois}} u_0 = q^n u_0$
En résumé, dans vos futures productions écrites dès que vous serez tenté d'écrire "ainsi de suite" ou "..." demandez vous plutôt si une récurrence n'est pas plus appropriée.

Exercice 73 Démontrer par récurrence les assertions suivantes :

1. Pour $n \in \mathbb{N},\ 1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$
2. Pour $n \in \mathbb{N},\ 1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. Pour $n \in \mathbb{N},\ 1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=0}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 7^n-1$ est divisible par 6.
5. Pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
6. ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

7.2 Un peu de logique

Exercice 74 Remplir les pointillés avec l'un des symboles suivants : $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ldots\ldots. x > 0$
2. Soit $x \in \mathbb{N} : x \geq 1 \ldots\ldots. x > 0$
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : x = y \ldots\ldots. x^2 = y^2$
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : |x|+|y| = 0 \ldots\ldots. |x+y| = 0$
5. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+ : x = y \ldots\ldots. x^2 = y^2$
6. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : x^2+y^2 = 0 \ldots\ldots. x = y$
7. Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R} : x = y \ldots\ldots. xz = yz$
8. Soit $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x \ldots\ldots. x > 1$