

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer

1. le nombre d'entiers naturels dans l'intervalle $[0, n]$,
2. le nombre d'entiers naturels dans l'intervalle $[0, x]$,
3. le nombre d'entiers naturels impairs dans l'intervalle $[0, x]$,
4. le nombre d'entiers naturels multiples de 3 dans l'intervalle $[0, x]$,
5. le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation $a + 2b = 2024$,
6. le nombre de façons de payer 10 euros en pièces de 10 et 20 centimes,
7. le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation $2a + 3b = 2024$.

Problème 2

Pour tout nombre réel $k > 0$, on définit la fonction h_k par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, h_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On notera \mathcal{C}_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Soit k un nombre réel strictement positif.

1. Exprimer la dérivée de h_k .
2. Montrer que la fonction h_k admet un minimum sur \mathbb{R} en $x = \ln(k)$.
3. Calculer les limites de h_k en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser le tableau de variations complet.
4. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $h_k(x) - x$. Que peut-on en déduire sur la courbe \mathcal{C}_k par rapport à la droite d'équation $y = x$.
5. Étant donnés deux réels $k_1 < k_2$, déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_{k_1} et \mathcal{C}_{k_2} .
6. À l'aide des informations ci-dessus et des valeurs $h_k(0)$, tracer sur un même graphique l'allure des courbes $\mathcal{C}_{1/2}$, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).
7. On note A_k le point de la courbe \mathcal{C}_k correspondant au minimum de la fonction h_k . Montrer que pour tout $k > 0$, le point A_k appartient à une même droite dont on donnera une équation.