Chapitre A2

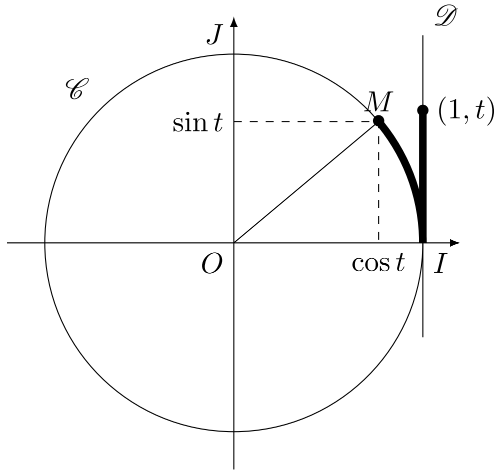
Trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique

Soit $t \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ étant le cercle trigonométrique, on place un point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite $\mathscr{D}$. Puis on enroule la droite sur le cercle. Au point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite correspondra un point M sur le cercle tel que l'arc de I à M ait pour longueur $|t|$ (éventuellement après avoir effectué plusieurs tours).

Définition A2.1

On appelle **cosinus** et **sinus** du nombre t, et on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$, respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M.



Proposition A2.2

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

Définition A2.3

On dit que deux nombres réels a et b sont **congrus modulo** 2π lorsqu'ils sont égaux, à un multiple de 2π près. On note

$$a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, a = b + k \times 2\pi.$$

Proposition A2.4

Le nombre t est une mesure (en radians) de l'angle $\widehat{IOM}$.

2 Propriétés géométriques

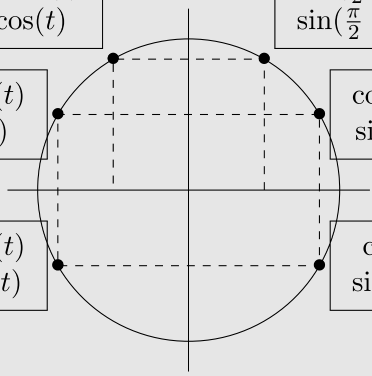
Proposition A2.5

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes.

$$\cos(t + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(t) \qquad \sin(t + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(t)$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - t) = \sin(t) \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t)$$



$$\cos t = \cos(t + 2\pi) \qquad \sin t = \sin(t + 2\pi)$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t) \qquad \sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

$$\cos(-t) = \cos(t) \qquad \sin(-t) = -\sin(t)$$

Proposition A2.6

On a les valeurs remarquables suivantes.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	

Proposition A2.7

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Proposition A2.8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \equiv b\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b\,[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \equiv b\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b\,[2\pi] \end{array} \right. .$$

3 Formules trigonométriques

Proposition A2.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Formules d'addition :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$,
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(ii) Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

(iii) Formules de linéarisation :

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$,
- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$,
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$,
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

(iv) Formules de factorisation : soit $p, q \in \mathbb{R}$.

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

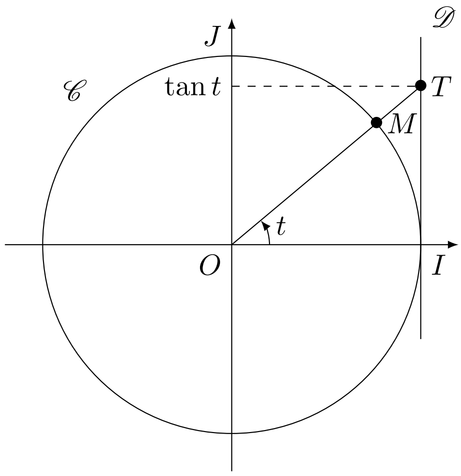
Proposition A2.10

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls et $t \in \mathbb{R}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $a\cos t + b \sin t = r\cos(t-\varphi)$.

4 Tangente

Définition A2.11

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On note T le point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en I. On appelle **tangente** de t l'ordonnée de T, notée $\tan t$. On définit la **tangente** de t



Proposition A2.12

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Proposition A2.13

Soit $t \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$. On a

- $\tan(t + \pi) = \tan t$,
- $\tan(\pi - t) = -\tan t$.
- Valeurs remarquables :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Proposition A2.14

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

(i) Formules d'addition :

- si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,
- si $a - b \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

(ii) Formules de duplication : si $a \not\equiv \frac{\pi}{4}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

(iii) Formules de changement de variable : soit $u = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$.

- $\cos a = \frac{1-u^2}{1+u^2}$,
- $\sin a = \frac{2u}{1+u^2}$,
- $\tan a = \frac{2u}{1-u^2}$,