# Sol A1.
# Ensembles de nombres

**Solution A1.5**

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$, on définit $A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$ et $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$.

- $x \leqslant y$ donc $x + y \leqslant 2y$, donc $A \leqslant y$.
- $A - G = x + y - \sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$ donc $A \geqslant G$.
- $\dfrac{1}{H} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x+y}{xy}$ donc $\dfrac{1}{H} - \dfrac{1}{G} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{xy} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2xy} \geqslant 0$. Donc $\dfrac{1}{H} \geqslant \dfrac{1}{G}$, donc $H \leqslant g$.
  **Remarque.** On peut aussi appliquer l'inégalité précédente avec $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, qui vérifient que $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
- $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$ donc $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{2}{x}$. Donc $\dfrac{1}{H} \leqslant \dfrac{1}{x}$, *i.e.* $H \geqslant x$.

On a montré (de droite à gauche) les inégalités constituant la propriété :

$$x \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant y.$$

**Solution A1.11**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$.
   D'autre part, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $-2x \leqslant -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$.
   En sommant ces deux encadrements :
   $$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$
   Or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, donc $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
2. On note $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de $x$, à savoir $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

   **1^er^ cas :** $\{x\} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$.
   On a alors $2\lfloor x \rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$, d'où par définition $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
   Par ailleurs $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$, donc *a fortiori* $\lfloor x \rfloor \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$ et donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
   Finalement, on a bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

   **2^e^ cas :** $\{x\} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   On a alors $2\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, d'où par définition $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
   Par ailleurs $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \dfrac{3}{2}$, donc *a fortiori* $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$ et donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
   Finalement, on a bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor$.