TD A3. Calculs algébriques

1 Sommes et produits

Exercice A3.1

Montrer que pour tout $n > 1$ entier, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Exercice A3.2

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $[0,1]$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1-a_k).$$

Exercice A3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3^k - 2k + n - 1)$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2$ (de deux manières différentes),
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ (poser $j = k-1$),
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$,
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} |n-k|$,

Exercice A3.4

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer deux réels c et d tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{c}{k} + \dfrac{d}{k+2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice A3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice A3.6

1. Rappeler pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Exercice A3.7 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)$.

Exercice A3.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$,
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$,
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice A3.9

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes avec le symbole produit puis à l'aide de factorielles.

1. $A = (p+1)(p+2)\dots(p+n)$,
2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p$,
3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)$.

Exercice A3.10 ✲✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

2 Coefficients binomiaux

Exercice A3.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

Exercice A3.12 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ (formule du Chef).
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice A3.13 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{2k}$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{2k+1}$.

1. Exprimer $(1+\sqrt{2})^n$ et $(1-\sqrt{2})^n$ à l'aide de A et B.
2. En déduire les valeurs de A et B.

3 Sommes doubles

Exercice A3.14 ✱

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 2^{2i-j}$,
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$,
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$,
4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$,
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (ij)$,
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Exercice A3.15 ✱

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$.

Exercice A3.16 ✱✱

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.