

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

A Préliminaire

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\sin\left(\frac{y}{2}\right) \neq 0$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + ky) = \frac{\sin\left(\frac{ny}{2}\right) \cos\left(x + \frac{(n-1)y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$. Montrer que α et β sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

B Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$

L'objectif de cette partie est d'exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ sous forme de radicaux, c'est-à-dire une expression faisant intervenir uniquement des nombres rationnels, des sommes des produits ou des racines. On pose $\theta = \frac{\pi}{17}$ et :

$$a_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$a_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

$$b_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$

$$b_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$b_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$

$$b_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

3. (a) Exprimer a_1 comme une somme et/ou différence de cosinus de nombres de la forme $k\theta$ avec $k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$.
 (b) En déduire le signe de a_1 .
4. (a) Calculer $a_1 + a_2$.
Indication : on obtient, après simplifications, un nombre rationnel !
 (b) Développer puis linéariser le produit $a_1 a_2$. Déterminer un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a_1 a_2 = p(a_1 + a_2)$.
 En déduire la valeur de $a_1 a_2$.
 (c) Déduire de ce qui précède des expressions de a_1 et de a_2 sous forme de radicaux.

5. (a) En procédant comme à la question précédente, calculer les produits b_1b_2 et b_3b_4 .
(b) En déduire des expressions de b_1 , b_2 , b_3 et b_4 sous forme de radicaux.
6. On pose $A = (1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$.
(a) Déterminer le signe de A .
(b) Exprimer A^2 sous la forme $q + r\sqrt{17}$, avec $q, r \in \mathbb{Z}$. En déduire une expression plus simple de A .
7. Exprimer b_1 sous forme d'un produit de cosinus. En déduire une expression de $\cos \theta$ sous forme de radicaux.