Chapitre B1

Études de fonctions

Objectifs

- Notion de fonction et notions connexes.
- Plan d'étude d'une fonction et réalisation technique.
- Notions de bijection et de bijection réciproque.
- Propriétés calculatoires des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme).
- Trigonométrie hyperbolique.

Remarques.

- Le plan de ce cours constitue un plan d'étude de fonction.
- Les fonctions données en exemples (➢) au fil du chapitre sont toutes des fonctions usuelles. Si elles illustrent ponctuellement l'une ou l'autre des notions abordées, c'est bien leur étude complète qui doit être connue.

1 Notion de fonction

1.1 Définitions

Définition B1.1

Une **fonction réelle** d'une variable réelle est la donnée d'un sous-ensemble (non vide) D de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in D$ d'une valeur réelle appelée **image** de x par la fonction.

Notations. Si on appelle f cette fonction, on écrit $f : D \to \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in D$, on note $f(x)$ l'image de x par f.

Définition B1.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. D est appelé **ensemble de définition de** f.
Soit $x \in D$ et $y = f(x)$; on dit que x est un **antécédent** de y par f.
Dans le plan muni d'un repère, on appelle **graphe** de f la partie formée par tous les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, dont l'équation cartésienne est $y = f(x)$.

➢ Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction puissance $x \mapsto x^n = \prod_{i=1}^{n} x$.

➢ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $a^2 = x$. On le note $\sqrt{x}$ et on définit ainsi la fonction **racine carrée** : $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Définition B1.3

Soit E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

- On appelle les ensembles E et F respectivement la **source** et le **but** de cette fonction.
- L'**image** (ou **ensemble image**) de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

➢ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ou $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

Définition B1.4

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- **majorée** lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \leqslant M$ (un tel M est **un majorant** de f),
- **minorée** lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \geqslant m$ (un tel m est **un minorant** de f),
- **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Proposition B1.5

La fonction f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ est une partie majorée (resp. minorée, resp. bornée) de $\mathbb{R}$.

➢ sin, cos.

1.2 Opérations

Définition B1.6

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. Alors on peut définir

- la **somme** $f+g$ par $\begin{array}{rcl} f+g : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$,
- le **produit** $f \times g$ par $\begin{array}{rcl} f\times g : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\times g(x) \end{array}$.

De plus, si $\forall x \in D$, $g(x) \neq 0$, alors on peut définir

- l'**inverse** $\dfrac{1}{g}$ par $\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{g} : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array}$,
- le **quotient** $\dfrac{f}{g}$ par $\begin{array}{rcl} \dfrac{f}{g} : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$.

➢ polynômes.

➢ $x \mapsto x^{3/2}$.

➢ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

➢ $\log_2$, $\log_{10}$.

Définition B1.7

On définit la fonction **logarithme décimal** par $\log_{10} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ et la fonction **logarithme en base** 2 par $\log_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Définition B1.8

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$. Si pour tout $x \in D$, $f(x) \in D'$, alors on peut définir la **fonction composée** de f par g, notée $g \circ f$, par : $\begin{array}{rcl} g\circ f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.

➢ $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition B1.9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la **fonction puissance** α par

$$p_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}.$$

1.3 Réduction de l'intervalle d'étude

Définition B1.10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de D. On définit la **restriction** de f à A, notée $f|_A$, par $f|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$

Définition B1.11

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ (**une période**) tel que pour tout $x \in D$,

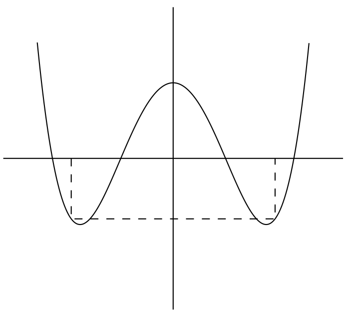
$$x + T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Si elle existe, la plus petite période strictement positive de f s'appelle **la période** de f.

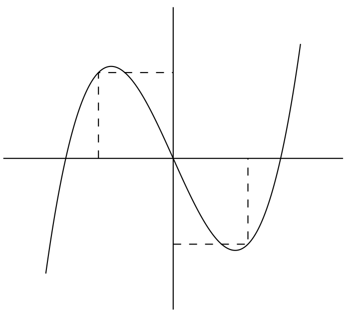
Définition B1.12

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est

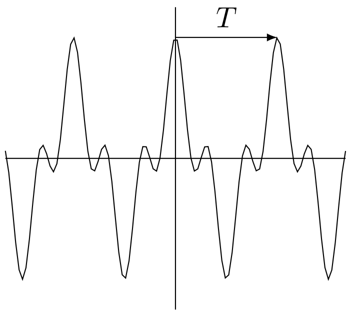
- **paire** lorsque $\forall x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
- **impaire** lorsque $\forall x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.



fonction paire



fonction impaire



fonction périodique

➢ sin, cos.

➢ sh, ch.

Définition B1.13

On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Proposition B1.14

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(i) Si f est paire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) Si f est impaire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(iii) Si f est T-périodique, alors le graphe de f est invariant par la translation de vecteur $(T, 0)$.

(iv) Le graphe de $x \mapsto f(x-a)$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur $(a, 0)$.

(v) Le graphe de $x \mapsto f(x) + b$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur $(0, b)$.

(vi) Le graphe de $x \mapsto f(x-a) + b$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur (a, b).

Dém. B1.14

(i) Pour tout x, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-x$ est de coordonnées $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$, symétrique par rapport à l'axe du point d'abscisse x : $(x, f(x))$.

(ii) Même raisonnement.

(iii) Pour tout x, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x + T$ est de coordonnées $(x + T, f(x + T)) = (x + T, f(x))$, image du point $(x, f(x))$ par la translation annoncée.

(iv) Soit $g : x \mapsto f(x - a)$. Pour tout x, le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ est $M(x, f(x))$. Le point d'abscisse $x + a$ de $\mathscr{C}_g$ est $M'(x + a, f(x))$ car $g(x + a) = f(x)$. Et M' est bien l'image de M par la translation annoncée.

(v) et suivantes : même raisonnement

2 Limites

2.1 Continuité

On définira dans un chapitre ultérieur la notion de limite de manière précise. Pour l'heure, on s'appuie sur la notion que vous en avez acquise au lycée.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$ ou au bord de D. Si elle existe, la limite de f en a (ou limite de $f(x)$ quand x tend vers a) est la valeur dont s'approche $f(x)$ quand x s'approche de a.

Notations. Si f admet une limite ℓ en a, on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Et cette valeur ℓ est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Définition B1.15

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$. On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

➢ $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en a si $a \in \mathbb{Z}$.

2.2 Limites usuelles

Fonction	Continuité	$\lim\limits_{x \to -\infty}$	$\lim\limits_{x \to 0^-}$	$\lim\limits_{x \to 0^+}$	$\lim\limits_{x \to +\infty}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, pair	$\mathbb{R}$	$+\infty$			$+\infty$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ impair	$\mathbb{R}$	$-\infty$			$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ pair	$\mathbb{R}^*$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ impair	$\mathbb{R}^*$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$			0^+	$+\infty$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	0^+			$+\infty$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$			$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$-\infty$			$+\infty$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$+\infty$			$+\infty$
sin ou cos	$\mathbb{R}$	NON			NON

La fonction tangente est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Elle est π-périodique et $\tan(x) \xrightarrow[x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+]{} -\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} +\infty$

2.3 Asymptotes

Définition B1.16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I$ une extrémité de I. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** en x_0 lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en x_0. La droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** à la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** si $a \neq 0$ et une **asymptote horizontale** si $a = 0$.

Remarque. Bien sûr la définition d'asymptote oblique ou horizontale suppose que I soit non borné.

➢ tan

➢ th

Définition B1.17

On appelle **tangente hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

2.4 Opérations

Théorème B1.18 (Opérations algébriques)

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un élément de I ou au bord de celui-ci. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$. Alors

(i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$,

(ii) $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\ell_2$,

(iii) avec $\ell_1 \neq 0$, $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1/\ell_1$,

(iv) si $\ell_1 = 0^+$, alors $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ et si $\ell_1 = 0^-$, alors $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

Remarque. Ces opérations se font aussi dans le cas de limites infinies avec les règles de calcul suivantes.

ℓ_2 \ ℓ_1	$-\infty$	$\in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I
$\in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	F.I	$+\infty$	$+\infty$

Somme de limites.

ℓ_2 \ ℓ_1	$-\infty$	$\in \mathbb{R}_-$	0	$\in \mathbb{R}_+$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}_-$	$+\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$
0	F.I	0	0	0	F.I
$\in \mathbb{R}_+$	$-\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Produit de limites.

Théorème B1.19 (Composition)

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$, alors $(g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Théorème B1.20 (Comparaison, encadrement, gendarmes)

Soit f, g et h trois fonctions réelles définies sur I et a un élément ou un bord de I.

(i) Si $\begin{cases} \forall x\in I,\ g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Si $\begin{cases} \forall x\in I,\ g(x)\leqslant f(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

2.5 Croissances comparées

Proposition B1.21

(i) On a les limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.$$

(ii) On a la limite en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Proposition B1.22

Soit $a > 0$ et $b > 0$.

(i) On a les limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^a e^{-bx} = 0.$$

(ii) On a la limite en 0^+ :

$$\lim_{x\to0^+} x^a (\ln x)^b = 0.$$

3 Variations

3.1 Définitions

Définition B1.23

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- **croissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$;
- **décroissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))$;
- **strictement croissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$;
- **strictement décroissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$;

➢ Fonction affine : $x \mapsto ax + b$.

Remarque. Cet énoncé concerne bien les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Cela n'empêche pas d'étudier une fonction définie sur un ensemble de définition D plus général, par exemple $\mathbb{R}^*$. Il suffit de scinder l'étude en deux temps : sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3.2 Dérivabilité

Définition B1.24

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en** $a \in I$ lorsque $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

Proposition B1.25

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors elle est continue en a.

Proposition B1.26

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dém. B1.26

La tangente à la courbe de f en a est la droite passant par le point $(a, f(a))$ et de pente $f'(a)$ (ceci peut être justifié topologiquement en voyant la tangente comme limite de cordes mais ces considérations dépassent le cadre de ce cours).
Ceci étant établi, un autre point (x, y) du plan (avec $x \neq a$) appartient à cette droite si et seulement si $\dfrac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$, ce qui donne exactement l'équation attendue.

Définition B1.27

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** de f, notée f' par

$$f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

➢ $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

3.3 Dérivées usuelles

$f(x)$	Dérivabilité	$f'(x)$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
x^a, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$

$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$
$\text{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos}(x)$	$]-1,1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

3.4 Opérations

Proposition B1.28

Soient f, g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,

(iii) λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$,

(iv) si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$,

Dém. B1.28

On raisonne sur le taux d'accroissement en un point $a \in I$.

(i) $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) + g'(a)$.

(ii) $\forall x \in I \setminus \{a\}$,
$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) \\ &\underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$
car f est dérivable donc continue en a, d'où $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

(iii) Facile.

(iv) Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \dfrac{1}{g(x)g(a)} \dfrac{g(a)-g(x)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{g(a)^2}(-g'(a))$
car g est dérivable donc continue en a, d'où $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g(a)$.

Puis on applique la formule du produit à $f \times \dfrac{1}{g}$.

➢ tan.

Proposition B1.29 (Composée)

Étant données deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Dém. B1.29

Pour tous $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\begin{aligned}\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \frac{(g(f(x)) - (g(f(a))}{x - a}\\ &= \frac{(g(f(x)) - (g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\\ &\xrightarrow[x \to a]{} g'(f(a))f'(a) \text{ car } f \text{ est continue en } a \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a).\end{aligned}$$

3.5 Lien dérivation/variations

Théorème B1.30

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

(i) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

(ii) f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

(iii) Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Dém. B1.30

Admis pour l'instant : conséquence du théorème des accroissements finis.

➢ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$).

Proposition B1.31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et a un point intérieur à I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque. Attention, ça ne marche que dans un sens : les éventuels extrema sont aux points d'annulation de la dérivée. Lorsqu'on connaît un point d'annulation de f', seule une étude complémentaire (par exemple examiner les variations au voisinage de ce point) permet de savoir si nous avons affaire à un minimum, à un maximum local ou à une autre situation.

3.6 Équations différentielles linéaires

- cos, sin.
- exp.

Théorème et définition B1.32

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, notée exp et appelée **exponentielle**, telle que

$$\begin{cases} \exp(0) = 1, \\ \exp' = \exp\,. \end{cases}$$

Remarque. Cette définition traduit ce que l'on appelle couramment une « croissance exponentielle ».

Dém. B1.32

On admet l'existence d'une telle fonction (conséquences de théorèmes d'analyse sur les équations différentielles) et on en montre l'unicité.

- Montrons qu'une telle fonction ne s'annule pas.
  Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f' = f \end{cases}$ et posons $h : x \mapsto f(x)f(-x)$.
  h est dérivable comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
  $h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(-x)f(x) = 0$.
  h est donc constante égale à sa valeur en 0, soit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = 1$. Donc $f(x)$ n'est jamais nul.
- Montrons maintenant l'unicité à proprement parler.
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f' = f \end{cases}$ et $\begin{cases} g(0) = 1, \\ g' = g \end{cases}$.
  On pose $q : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas.
  Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$.
  q est donc constante égale à $q(0) = 1$.
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$.
  On a donc montré que $f = g$.

Proposition B1.33

(i) Équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

(iii) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Dém. B1.33

(i) Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$ (on a montré que $\exp(y) \neq 0$).
On constate que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
De plus $f(0) = 1$. Donc par unicité, $f = \exp$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = f(x)$, soit $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

(ii) On a déjà montré que $\exp$ ne s'annule pas.
La formule précédente nous donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0.$$

(iii) Conséquence directe du signe de $\exp$, qui n'est autre que $\exp'$.

(iv)
- On étudie $g : x \mapsto \exp(x) - x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout x, $g'(x) = \exp(x) - 1$.
  Or $\exp$ est strictement croissante et vaut 1 en 0. g' est donc positive sur $\mathbb{R}_+$, négative sur $\mathbb{R}_-$. Et les variations qui en découlent indiquent un maximum en 0 pour la fonction g. Comme $g(0) = 0$, $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\exp(x) \geqslant x$ et par comparaison de limites, on obtient : $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- L'équation fonctionnelle donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$.
  D'où $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
  D'où $\exp(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Notation. On pose $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.

Remarque. L'équation fonctionnelle nous permet d'obtenir les règles de calcul pratique suivantes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$, on a $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

4 Bijection réciproque

4.1 Définition

Définition B1.34

Soit $f : D \to D'$. On dit que f est **bijective** (f est une **bijection**) lorsque

$$\forall y \in D', \exists! x \in D, y = f(x),$$

i.e. lorsque tout élément de D' admet un unique antécédent par f.
Dans ce cas on peut définir la **bijection réciproque** de f, notée $f^{-1} : D' \to D$, qui à tout élément de J associe son unique antécédent par f.

Proposition B1.35

Soit $f : D \to D'$ une fonction bijective. Alors
- $\forall x \in D,\ f^{-1}(f(x)) = x$.
- $\forall x \in D',\ f(f^{-1}(x)) = x$.

Proposition B1.36

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone réalise une bijection de I dans son ensemble image.

Remarque. Attention, pour parler de bijection, il faut bien restreindre l'ensemble d'arrivée de f à son ensemble image, c'est-à-dire $\{f(x) \mid x \in I\}$, l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ effectivement atteints par f.

4.2 Dérivation

Proposition B1.37 (Dérivation)

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.
- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \in J$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.
- Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarque. Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. En particulier les tangentes aux deux courbes en des points qui se correspondent ont des pentes inverses l'une de l'autre.

4.3 Exemples

Définition B1.38

La fonction **logarithme népérien**, définie sur $]0, +\infty[$ et notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Proposition B1.39

- La fonction ln est strictement croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
- Limites : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Équation fonctionnelle : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Dém. B1.39

- Étant continnue et strictement croissante, $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc sa bijection réciproque, $\ln$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'exprime : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{\exp(\ln x)} = \dfrac{1}{x}$. Les variations de $\ln$ découlent du signe de cette expression sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les limites se déduisent de la symétrie entre les courbes représentatives de $\exp$ et $\ln$.
- On $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy$.
  D'où, en composant par $\ln$, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$.

Définition B1.40

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc sinus** son application réciproque $\sin^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arcsin.

Proposition B1.41

(i) La fonction Arcsin est continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \text{ Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition B1.42

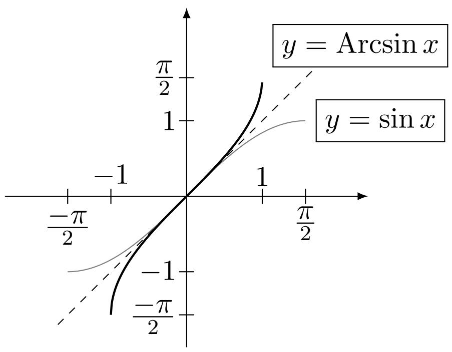
La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est continue et strictement décroissante. On appelle **arc cosinus** son application réciproque $\cos^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arccos.

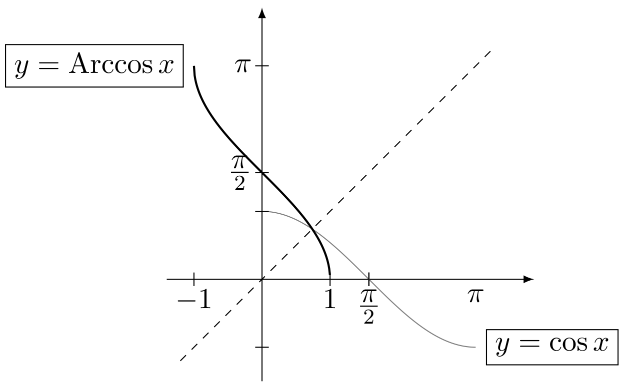
Proposition B1.43

(i) La fonction Arccos est continue, strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \text{ Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





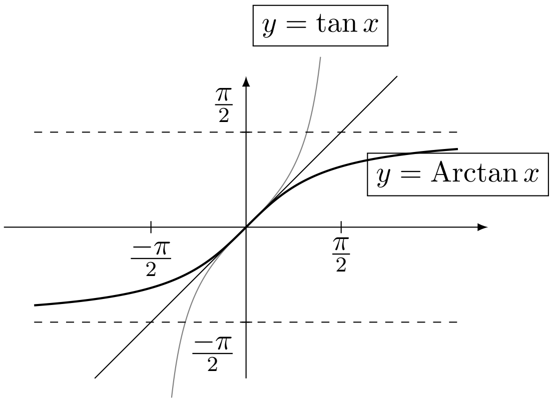
Définition B1.44

La restriction de la fonction tangente à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc tangente** son application réciproque $\tan^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et notée Arctan.

Proposition B1.45

La fonction Arctan est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



Méthodes

- Lever une indétermination dans un calcul de limite
  - ➢ par factorisation,
  - ➢ par croissances comparées,
  - ➢ en reconnaissant un taux d'accroissement.
- Étude des variations d'une fonction.
- Déterminer le signe d'une fonction
  - ➢ par résolution directe,
  - ➢ par l'étude de ses variations.
- Repérer une asymptote verticale, horizontale ou oblique.
- Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une bijection réciproque.