TD B1. Études de fonctions

1 Généralités

Exercice B1.1 ✲

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3 \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice B1.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec D centré en 0. Montrer les assertions suivantes.

1. Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.
2. Si f est impaire et g est paire alors $g \circ f$ est paire.
3. Si f est paire alors $g \circ f$ est paire.

Exercice B1.3

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser les différentes fonctions la constituant, ainsi que les opérations (somme, produit, quotient, composée) mises en jeu. Donner alors son ensemble de définition.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x^2-7}{2x+3}$,
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x^2-7}{x^2-1}$,
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+4}$,
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-4}$,
5. $f_5 : x \mapsto \sqrt{-x^2+3x+4}$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x-7}}$,
7. $f_8 : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$,
8. $f_9 : x \mapsto \ln(e^x-1)$,
9. $f_{10} : x \mapsto \ln(x-x^2)$,
10. $f_{11} : x \mapsto \sqrt{x}\ln(4x^2-3)$,
11. $f_{12} : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2-1})$.

2 Limites

Exercice B1.4

1. Détermier
   (a) les limites en 0^+ et $+\infty$ de $\sqrt{\dfrac{9x+2}{x}}$
   (b) les limites en 1^+ et 1^- de $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-1}$ et de $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.
2. Déterminer les limites
   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.
   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}\ln(x^3)}{x^4}$,

(e) $\lim_{x\to 0^-} x^3 e^x (\ln(-x))^2$, (f) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Exercice B1.5 ✲

Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-2x-1}{x-3}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x-2}$.

3 Dérivation

Exercice B1.6

Sous réserve d'hypothèses suffisantes de dérivabilité :

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.
2. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction T-périodique ?

Exercice B1.7

1. Soit $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice B1.8 ✲

1. Déterminer, suivant la valeur du réel α : $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis en déduire $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

4 Fonctions usuelles

Exercice B1.9 ✲

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice B1.10 ✲✲ *(Caractérisations du logarithme, tome 1)*

Étant donné un intervalle I, on cherche les fonctions f non nulles et dérivables sur I telles que
$$\forall (x,y) \in I,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que si f est définie en 0, alors f est la fonction nulle.
2. On considère à partir de maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $g(y) = f(xy)$. Calculer une expression de g' et en déduire celle de f'.
4. Donner les fonctions solutions du problème.

Exercice B1.11 ⚙⚙ *(Caractérisations du logarithme, tome 2)*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On note f la primitive de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ s'annulant en $x = 1$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(xy)$. Calculer une expression de g' puis de f'.
2. En déduire que $g - f$ est constante puis que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice B1.12 ⚙⚙

Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice B1.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui convient) les équations, inéquations ou systèmes suivants.

1. $\sqrt{19-x} + \sqrt{97+x} = 14$,
2. $|2x-4| \leqslant |x-1|$
3. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$,
4. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
5. $5^x - 5^{x-1} - 2^{3x-1} = 0$,
6. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$,
7. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
8. $\begin{cases} x + y = 52 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$,
9. $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$,
10. $\tan(3 \operatorname{Arcsin} x) = 1$,
11. $\operatorname{ch} x = a$,
12. $5 \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x = 4$.

Exercice B1.14 ⚙

Étudier les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \ln(\ln x)$,
2. $f_2(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$,
3. $f_3(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$,
4. $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$,
5. $f_5(x) = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$,
6. $f_7(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

Exercice B1.15 ⚙

Calculer le maximum pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice B1.16 ⚙⚙

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$.
2. En déduire que pour tous $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha.$$

5 Trigonométrie réciproque

Exercice B1.17 ✿

Étudier les fonctions $\mathrm{Arcsin} \circ \sin$, $\mathrm{Arccos} \circ \cos$ et $\mathrm{Arctan} \circ \tan$.

Exercice B1.18 ✿

Déterminer $\mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(2) + \mathrm{Arctan}(3)$.

Exercice B1.19 ✿

Calculer

1. pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\mathrm{Arctan}\, x)$ et $\cos(\mathrm{Arctan}\, x)$,
2. pour $x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$,
3. pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(1/x)$.

Exercice B1.20 ✿✿ *(Formule de Machin)*

1. Montrer que $\mathrm{Arctan}(1/2) + \mathrm{Arctan}(1/3) = \pi/4$.
2. Lorsqu'il est défini, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
3. En déduire que $\pi/4 = 4\,\mathrm{Arctan}(1/5) - \mathrm{Arctan}(1/239)$.

Exercice B1.21 ✿✿

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arcsin}\, \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice B1.22 ✿✿

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Arctan}\, a - \mathrm{Arctan}\, b = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice B1.23 ✿✿✿

Soit $x_1, \dots, x_7$ sept nombres réels distincts. Montrer qu'il existe i, j deux entiers (avec $1 \leqslant i < j \leqslant 7$) tels que $0 < \dfrac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6 Trigonométrie hyperbolique

Exercice B1.24 ✿

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Établir des relations entre $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$ et les quantités $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{sh}(b)$.
2. Montrer que $\mathrm{ch}(2a) = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(a)$.

Exercice B1.25 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(2kx) = \frac{\mathrm{sh}\left((n+1)x\right)}{\mathrm{sh}\, x}\, \mathrm{ch}(nx).$$

Exercice B1.26 ✿✿

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(2x)} = \dfrac{4\operatorname{ch}^2(x) - 3}{2\operatorname{sh}(x)}$.
2. Étudier f.

Exercice B1.27 ✿✿✿

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} x \geqslant x$ et $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{th} x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

Exercice B1.28 ✿✿

Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

7 Bijections

Exercice B1.29 ✿✿

1. Soit $u, v \in [-1, 1]$ tels que $u^2 + v^2 = 1$. Justifier qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\varphi) = u \\ \sin(\varphi) = v \end{cases}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b \sin t = A\cos(t - \varphi).$$

Exercice B1.30 ✿

Montrer que sh est bijective et effectuer l'étude complète de sa bijection réciproque.

Exercice B1.31

Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier qu'elle est bijective en déterminant sa bijection réciproque.

1. $f_1 : x \mapsto 3x - 5$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
2. $f_2 : x \mapsto x^2 + 1$, de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$,
3. $f_3 : x \mapsto x^3 - 1$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-1, +\infty[$,
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x-3}{x-2}$, de $]2, +\infty[$ dans $]-\infty, 1[$,
5. $f_5 : x \mapsto e^{x+1}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x - 4}{e^x + 2}$, de $\mathbb{R}$ dans $]-2, 1[$.

Exercice B1.32

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction dérivable strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

Exercice B1.33 ✿✿

Combien la fonction $x \mapsto (x-1)e^x - ex + 1$ a-t-elle de zéros ?

Exercice B1.34 ✿

Soit $f : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2-1) \end{array}$.

1. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
3. Calculer f^{-1}.
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$ de deux manières différentes.