Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer

1. On peut établir une démonstration par récurrence de :

$$\text{Il y a } n+1 \text{ entiers dans } [0,n].$$

Init. Dans $[0,0]=\{0\}$, il y a un entier : 0.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il y ait $n+1$ entiers dans $[0,n]$.
On a $[0,n+1]=[0,n]\cup]n,n+1]$, cette réunion étant disjointe.
Dans $[0,n]$ il y a $n+1$ entiers par H.R.
Dans $]n,n+1]$, il y a un seul entier : $n+1$. (on peut détailler à nouveau par récurrence pourquoi il n'y a pas d'entier dans $]n,n+1[$ si on veut aller au fond des choses).
Finalement il y a bien $n+1+1$ entiers dans $[0,n+1]$.

On a montré par récurrence que : $\boxed{\text{il y a } n+1 \text{ entiers dans } [0,n]}$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $p \in [0,x] \Leftrightarrow 0 \leqslant p \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant p \leqslant \lfloor x \rfloor$.
On détaille cette dernière équivalence :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $0 \leqslant p \leqslant x$. Comme p est un entier et $p \leqslant x$, on a $p \leqslant \lfloor x \rfloor$, d'où $0 \leqslant p \leqslant \lfloor x \rfloor$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $0 \leqslant p \leqslant \lfloor x \rfloor$. $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a $0 \leqslant p \leqslant x$.

Ceci montre que les entiers de $[0,x]$ sont les entiers de $[0,\lfloor x \rfloor]$.
D'après la première question, $\boxed{\text{il y a } \lfloor x \rfloor + 1 \text{ entiers dans } [0,x]}$.

3. Soit p est un entier naturel impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $p = 2k+1$.

   - Si $p \in [0,x]$, alors $0 \leqslant p \leqslant x$.
   D'où $0 \leqslant 2k+1 \leqslant x$, *i.e.* $-\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant \dfrac{x-1}{2}$, soit encore $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{x-1}{2}$ car k est entier.
   - Réciproquement, si $k \in \left[0, \dfrac{x-1}{2}\right]$, alors $2k+1$ est un entier impair de $[0,x]$.

Il y a donc autant d'entiers impairs dans l'intervalle $[0,x]$ que d'entiers dans $\left[0, \dfrac{x-1}{2}\right]$. D'après la question précédente, $\boxed{\text{il y a } \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor + 1 \text{ entiers naturels impairs dans l'intervalle } [0,x]}$.

4. On refait le même raisonnement qu'en question 2 avec $3k$ au lieu de $2k+1$ et on obtient

$$\boxed{\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 \text{ multiples de 3 dans l'intervalle } [0,x]}.$$

5. $a+2b=2024 \Leftrightarrow a = 2024-2b$.
(a,b) est solution de l'équation si et seulement si $b \in \mathbb{N}$ et $2024-2b \in \mathbb{N}$, *i.e.* $2b \in [0,2024]$, *i.e.* $b \in [0,1012]$.
D'après la question 1, $\boxed{\text{il y a 1013 couples } (a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ solutions de l'équation } a+2b=2024}$.

6. On cherche le nombre de couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $10a+20b = 1000$ (10 euros c'est 1000 centimes), soit $a+2b = 100$. On est ramené à la question précédente avec 100 à la place de 2024. Le même raisonnement donne $\boxed{\text{51 façons de payer 10 euros en pièces de 10 et 20 centimes}}$. **Remarque.** On pouvait donner un résultat général : $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$ couples solutions de $a + 2b = n$.
7. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On a $2a + 3b = 2024 \Leftrightarrow a = \dfrac{2024 - 3b}{2}$. Donc on a un couple solution si et seulement si $2024 - 3b \in 2\mathbb{N}$, *i.e.* $2024 - 3b \geqslant 0$ et $2024 - b \in 2\mathbb{N}$ (car $2b$ est pair).
Cela équivaut à avoir $3b \leqslant 2024$, *i.e.* $b \in [0, 674]$ et pair, ce qui donne $\boxed{\text{388 solutions}}$.
Remarque. On pourrait poser la question plus générale avec $n \in \mathbb{N}$ au lieu de 2024. Après une petite disjonction de cas, le nombre de solutions est $\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor + 1$ si n est pair et $\left\lfloor \dfrac{n-3}{6} \right\rfloor + 1$ si n est impair.

Problème 2 (d'après bac S 2017 Liban)

Soit $k > 0$, on définit la fonction h_k par :

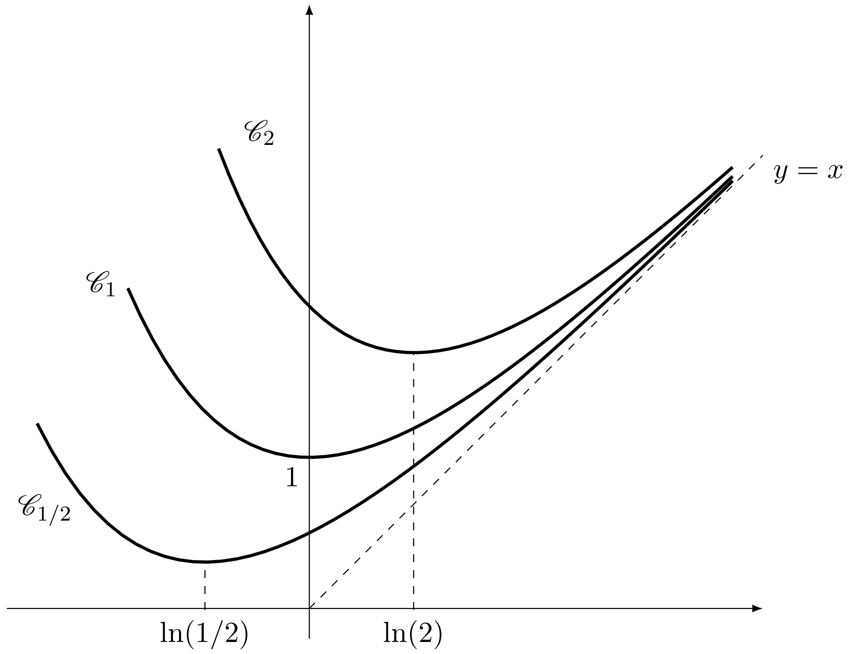
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h_k(x) = x + ke^{-x}.$$

1. h_k est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{h_k'(x) = 1 - ke^{-x}}.$$
2. $1 - ke^{-x} = 0 \Leftrightarrow ke^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\dfrac{1}{k}\right) \Leftrightarrow x = \ln(k)$.
De plus $h_k'(x)$ est positif pour $x > \ln(k)$ et négatif pour $x < \ln(k)$ (en considérant par exemple les limites en $+\infty$ et $-\infty$).
Donc la fonction $\boxed{h_k \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R} \text{ en } x = \ln(k)}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h_k(x) = +\infty}$.
Pour la limite en $-\infty$: on écrit $h_k(x) = e^{-x}(xe^x + k)$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x + k = k$ qui est strictement positif.
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = +\infty}$.

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$h_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_k(x) - x = ke^{-x}$ qui est strictement positif, et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On peut donc dire que $\mathscr{C}_k$ admet la droite d'équation $y = x$ comme $\boxed{\text{asymptote oblique}}$ (au voisinage de $+\infty$) et qu'elle se situe $\boxed{\text{au-dessus de cette droite}}$.
5. Soit deux réels $k_1 < k_2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_{k_2}(x) - h_{k_1}(x) = (k_2 - k_1)e^{-x}$, qui est strictement positif. Ainsi $\boxed{\mathscr{C}_{k_1} \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_{k_2}}$.

6.



7. D'après ce qui précède, A_k a pour abscisse $x_k = \ln(k)$ et pour ordonnée $y_k = h_k(x_k) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)}$, soit $\ln(k) + 1$ (car $e^{-\ln(k)} = 1/k$). Ainsi, pour tout $k > 0$, $y_k = x_k + 1$.
Donc $\boxed{\text{tous les points } A_k \text{ appartiennent à la droite d'équation } y = x + 1}$.