

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 Morceaux choisis

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Démontrer par l'absurde que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{x^2 + 1} \neq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \pi [2\pi]$.

(a) À l'aide de formules trigonométriques, exprimer $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

(b) En déduire que $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

(c) Démontrer alors une expression de $\cos x$ puis de $\sin x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

3. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$$

(a) Écrire la négation de cette assertion.

(b) Utiliser soigneusement ces assertions quantifiées pour montrer que

- \sin est majorée,
- $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2$ n'est pas majorée.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n [kx]$ et $T_n = \frac{1}{n^2} S_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{2}x.$$

(b) En déduire la convergence et la limite de T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. (a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\binom{n}{i}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2S_{n+1} = S_n + \frac{2}{n+2}$.

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}.$$

Problème 1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle les formules suivantes.

➤ Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)). \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)), \end{aligned}$$

➤ Formules de factorisation : soit $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \\ \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

1. Soit $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, 2\pi[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx + \varphi) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + \psi).$$

- (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right)$.
 (b) En déduire une expression analogue pour B_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in]0, 2\pi[$:

$$(E) : \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

2. (a) Déterminer des réels A et δ tels que $\forall X \in \mathbb{R}, \cos X - \sin X = A \cos(X + \delta)$.
 (b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation

$$(F) : \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0.$$

3. (a) Résoudre l'équation (F) sur \mathbb{R} .
 (b) En déduire les solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$.
 4. Montrer que si n n'est pas un multiple de 4, alors (E) a exactement $2n$ solutions sur $]0, 2\pi[$.

Problème 2

Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels. Étant donné $0 \leq k \leq n$, on rappelle la définition des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Formule de Vandermonde

1. Démontrer la relation de Pascal : pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq m$ et $p \leq n$. Démontrer par récurrence sur n la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \right)^2$.

4. On appelle $T_n = \sum_{k=0}^n k \left(\binom{n}{k} \right)^2$. À l'aide du changement d'indice $k = n - i$, exprimer T_n en fonction de n .

5. En déduire que si n est impair, alors $\binom{2n}{n}$ est pair.

Sommes remarquables

On pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.

6. Avec la convention $0^0 = 1$, calculer $S_0(n)$.

7. L'objet de cette question est une nouvelle méthode pour calculer $S_1(n) = \sum_{k=0}^n k$.

(a) On pose $f(x) = ax^2 + bx$. Déterminer a et b pour que $f(x+1) - f(x) = x$.

(b) En écrivant que $k = f(k+1) - f(k)$, en déduire $S_1(n)$ en fonction de n .

8. Une formule utile.

(a) Montrer que $S_{p+1}(n+1) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} i^k$.

(indication : on pourra tenter d'exprimer $(1+i)^{p+1}$ à l'aide de la formule du binôme)

(b) En déduire que $S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n)$.

(c) En déduire enfin que

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

9. À l'aide de la formule ci-dessus, exprimer sous forme factorisée $S_2(n)$ et $S_3(n)$.

10. On pose $M_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$. (on rappelle que $\min(i, j)$ vaut i si $i \leq j$ et vaut j sinon)

- (a) Montrer que $M_n = \sum_{i=1}^n \left((n-i)i + \sum_{j=1}^i j \right)$.
- (b) En déduire M_n en fonction de n .

Problème 3

A Une suite

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction g_n sur $]0, +\infty[$ par

$$g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x.$$

- Calculer g'_n et étudier les variations de g_n . Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
- En déduire qu'il existe un unique réel positif α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
 - Montrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$.
 - Montrer que $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$.
 - Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n . En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
- Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note ℓ sa limite.
- En utilisant la question (2d), calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ .

B Une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on appelle \mathcal{C} la représentation de f et \mathcal{C}_0 la représentation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Montrer que

$$f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

- Dresser le tableau de variations de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x})$. Que peut-on en déduire pour \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 ? Préciser leurs positions relatives.
- Dessiner \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 .