Exercice 1 **Morceaux choisis**

1. Supposons que l'assertion est fausse, *i.e.*
$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{x^2+1} = 1 + \frac{x^2}{2}.$$
Alors en élevant au carré, $x^2+1 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4}$, d'où $\frac{x^4}{4} = 0$, *i.e.* $x = 0$, ce qui est exclu.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\,[2\pi]$.
   (a) D'après les formules de linéarisation, $\boxed{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}}$ et $\boxed{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}}$.
   (b) Ainsi $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \boxed{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.
   (c) Cela donne $\cos(x)\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$, d'où $\boxed{\cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$.
   Notons, par commodité $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Puis $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$, d'où $\sin x = \pm\frac{2t}{(1+t^2)^2}$. Or $\sin x$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ sont de même signe, donc $\boxed{\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$.

3. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M.$$
   (a) Négation de cette assertion : $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M}$.
   (b) Utiliser soigneusement ces assertions quantifiées pour montrer que
   - Posons $M = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a bien $\sin x \leqslant M$.
     Ceci montre que $\boxed{\sin \text{ est majorée}}$.
   - Soit $M \in \mathbb{R}$. Posons $x = M^2$. Alors $f(x) = |M| + 2 > M$.
     Ceci montre que $\boxed{f : x \mapsto x+2 \text{ n'est pas majorée}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ et $T_n = \frac{1}{n^2} S_n$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$.
   Donc $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$, *i.e.* $x\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n < S_n \leqslant x\sum_{k=1}^{n} k$.
   Cela donne $\boxed{\frac{n(n+1)}{2}x - n \leqslant S_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}x}$.
   (b) On divise par n^2 : $\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} \leqslant T_n \leqslant \frac{n+1}{2n}x$.
   Comme $\frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$, on a $\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} \to \frac{x}{2}$ et $\frac{n+1}{2n}x \to \frac{x}{2}$.
   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} &= \frac{\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}}{\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}} \\
&= \frac{\binom{n+2}{k+1}}{\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}} \quad \text{d'après la formule de Pascal} \\
&= \frac{\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n+1-k)!}}{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{(n+1)!}{(k+1)(n-k)!}} \\
&= \frac{(n+2)}{\frac{(n+1)!}{n!(n-k)!}} \\
&= \frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\frac{n!}{n!(n-k)!}}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{\frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\binom{n}{k}}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $2S_{n+1} = \frac{2}{n+2}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{i}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or} \quad S_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{i}} \\
&= \frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} + \frac{1}{\binom{n+1}{i+1}} \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{j}}\right) \quad \text{(changement d'indice } j = i+1\text{)} \\
&= \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} - 1 + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{j}} - 1\right) \\
&= \frac{2}{n+2}\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} - \frac{2}{n+2} \\
&= 2S_{n+1} - \frac{2}{n+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{2S_{n+1} = S_n + \frac{2}{n+2}}$.

(c) On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}.$$

$\boxed{\textbf{Init.}}$ $\frac{1}{2^{0+1}}\sum_{i=1}^{1} \frac{2^i}{i} = 1$ et $S_0 = \frac{1}{0+1}\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{\binom{0}{i}} = 1.$

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie pour S_n.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i} + \frac{1}{2^{n+2}} \frac{2^{n+2}}{n+2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \frac{2^i}{i}}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire et achève la récurrence.

$\boxed{\textbf{Problème 1}}$

1. (a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $x \in]0,2\pi[$. On montre par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n \ : \ A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right).$$

On remarque au passage que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ *car* $\frac{x}{2} \in]0,\pi[$.

$\boxed{\textbf{Init.}}$ Pour $n = 1$, on a $A_n = \cos(x+\varphi)$ et :

$$\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos(x+\varphi) = \cos(x+\varphi).$$

Donc P_1 est vraie.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vraie. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \cos((n+1)x + \varphi) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos((n+1)x + \varphi)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

D'après les formules de linéarisation, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \varphi\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right)\right] + \left[\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x + \varphi\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \varphi\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x + \varphi\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Finalement, d'après les formules de factorisation :

$$A_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)x}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'où le résultat, d'après le principe de récurrence.

(b) Soit $\psi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,2\pi[$. Comme $\forall y \in \mathbb{R} \sin y = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx + \psi) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(kx + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent avec $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi\right)}.$$

2. (a) Soit $X \in \mathbb{R}$. On a $\cos X - \sin X = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos X - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin X\right) = \boxed{\sqrt{2}\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,2\pi[$. D'après les questions précédentes, avec $\varphi = \psi = 0$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

Enfin, comme $\forall X \in \mathbb{R} \cos X - \sin X = \sqrt{2}\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$, on en déduit

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 eq &\cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0\\
eq &\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \text{ ou } \frac{nx}{2} \equiv 0\,[\pi]\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2(n+1)}\left[\frac{2\pi}{n+1}\right] \text{ ou } x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{n}\right]}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{\frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(b) Pour déterminer les solutions de (E) sur $]0,2\pi[$, on résout les équations suivantes d'inconnues $k,\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < 4k+1 < 4(n+1) \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{4} < k < n + \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 < \frac{2\ell\pi}{n} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < \ell < n \\ &\Leftrightarrow 1 \leqslant \ell \leqslant n-1 \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,2\pi[$:

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in [\![0,n]\!] \right\} \cup \left\{ \frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in [\![1,n-1]\!] \right\}}$$

4. Supposons n non multiple de 4. Dans la réunion précédente, le premier ensemble contient exactement $n+1$ éléments et le second $n-1$. Si ces deux ensembles sont disjoints, alors la réunion $\mathscr{S}_E$ contiendra exactement $2n$ éléments. Raisonnons par l'absurde et supposons que ces deux ensembles ne soient pas disjoints. Il existe alors $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell \in [\![1,n-1]\!]$ tels que $\frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} = \frac{2\ell\pi}{n}$. On en déduit alors $(4k+1)n = 4(n+1)\ell$, d'où $n = 4\left((n+1)\ell - kn\right)$. Comme $(n+1)\ell - kn$ est entier, n est un multiple de 4, ce qui contredit notre hypothèse. D'où le résultat.

Problème 2

Dans tout l'exercice, n et m désignent des entiers naturels. Étant donné $0 \leqslant k \leqslant n$, on rappelle la définition des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Démontrer la relation de Pascal : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \boxed{\binom{n+1}{k}}.$$

2. **Init.** Pour $n = 0$, nécessairement $p = 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k}\binom{m}{0-k} = \binom{0}{0}\binom{0}{0} = 1 = \binom{m}{0}.$$

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule soit vérifiée.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k} &= \binom{m}{p} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)\binom{m}{p-k} \quad \text{(Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\\
&= \binom{n+m}{p} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\binom{m}{p-1-k} \quad \text{(HR et décalage d'indice)}\\
&= \binom{n+m}{p} + \binom{n+m}{p-1} \quad \text{(HR)}\\
&= \binom{n+1+m}{p} \quad \text{(Pascal).}
\end{aligned}$$

On a donc montré par récurrence sur n la formule de Vandermonde :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.}$$

3. Avec $n = m = p$, la formule de Vandermonde donne $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}}$.

4.

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\binom{n}{k}\right)^2\\
T_n &= \sum_{i=0}^{n}(n-i)\left(\binom{n}{n-i}\right)^2\\
T_n &= n\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\right)^2 - \sum_{i=0}^{n} i\left(\binom{n}{i}\right)^2\\
\text{D'où}\quad 2T_n &= n\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\right)^2\\
2T_n &= n\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{T_n = \frac{1}{2}n\binom{2n}{n}}$.

5. Ainsi, si n est impair, comme T_n est entier, 2 doit apparaître dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$. Donc $\boxed{\binom{2n}{n} \text{ est pair}}$.

Sommes remarquables

On pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$, pour tous $n,p \in \mathbb{N}$.

6. $S_0(n) = \sum_{k=0}^{n} 1$, donc $\boxed{S_0(n) = n+1}$.

7. (a) On pose $f(x) = ax^2 + bx$. Alors $f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) - (ax^2+bx) = 2ax + a + b$.

   Donc $(\forall x,\ f(x+1) - f(x) = x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}}$.

   (b) En écrivant que $k = f(k+1) - f(k)$, on a :

   $S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(0)$ (somme télescopique).

   Donc $S_1(n) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$.

8. Une formule utile.

   (a)

$$
\begin{aligned}
S_{p+1}(n+1) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} \quad \text{car le terme pour } k=0 \text{ est nul,} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (1+i)^{p+1} \quad \text{en posant } i = k-1, \\
&= \boxed{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} i^k} \quad \text{par formule du binôme.}
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
S_{p+1}(n+1) &= \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{p+1}{k} i^k \quad \text{(interversion des sommes)} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \sum_{i=0}^{n} i^k \quad \text{(factorisation)} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n)}
\end{aligned}
$$

   (c) $S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n) + S_{p+1}(n)$ donc $S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n)$.

   Or $S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n) = \sum_{k=0}^{n+1} k^{p+1} - \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} = (n+1)^{p+1}$. Donc

$$
\boxed{(n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n)}.
$$

9. • La formule précédente avec $p=2$ donne : $(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} S_k(n) = \binom{3}{0} S_0(n) + \binom{3}{1} S_1(n) + \binom{3}{2} S_2(n)$.

D'où $(n+1)^3 = (n+1) + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + 3S_2(n)$. On peut donc exprimer :
$6S_2(n) = 2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1) = (n+1)\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right]$, d'où la factorisation $6S_2(n) = (n+1)(2n^2+n) = n(n+1)(2n+1)$.

Finalement, $\boxed{S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

• On applique sur le même principe la formule pour $p=4$, qui donne :
$(n+1)^4 = (n+1) + 4\dfrac{n(n+1)}{2} + 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4S_3(n)$, ou, après calculs et factorisation, $4S_4(n) = n^2(n+1)^2$ ou encore $\boxed{S_4(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

10. On pose $M_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$.

(a) $M_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\min(i,j) = \begin{cases} i \text{ si } i \leqslant j \\ j \text{ sinon} \end{cases}$. On va séparer la somme intérieure :

$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{j=1}^{i} j + (n-i)i$.

Donc $\boxed{M_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + (n-i)i \right)}$.

(b) Par conséquent, $M_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i(i+1)}{2} + (n-i)i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(n + \dfrac{1}{2}\right) i - \dfrac{1}{2} i^2$.

Finalement, $M_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{1}{2} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

Problème 3 (inspiré du bac C 1993, Amérique du Nord)

A Une suite

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction g_n sur $]0, +\infty[$ par

$$g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{g_n'(x) = 1 + \dfrac{n}{2x}}$.
On a alors $g_n'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi g_n est strictement croissante.
On a $\boxed{\lim_{x \to 0} g_n(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty}$.

2. (a) g_n est continue et strictement monotone, de $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel positif α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
   (b) Pour tout entier $n > 0$, $g_n(1) = 1 - n \leqslant 0$ et $g_n(e^2) = e^2 > 0$ donc $g_n(1) \leqslant 0 < g_n(e^2)$. Par croissance de g_n, $\boxed{1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2}$.
   (c) On a $g_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n - n + \dfrac{n}{2}\ln(\alpha_n) = 0$. D'où $\dfrac{n}{2}\ln(\alpha_n) = n - \alpha_n$, donc $\boxed{\ln(\alpha_n) = 2 - \dfrac{2}{n}\alpha_n}$.
   (d) $g_{n+1}(\alpha_n) = x - (n+1) + \dfrac{n+1}{2}\ln(\alpha_n) = x - n + \dfrac{n}{2}\ln(\alpha_n) - 1 + \dfrac{1}{2}\ln(\alpha_n) = -1 + \dfrac{1}{2}\ln(\alpha_n) = \boxed{-\dfrac{1}{n}\alpha_n}$ d'après l'expression de la question précédente.
   On obtient $g_{n+1}(\alpha_n) < 0 = g_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Ainsi par croissance de g_{n+1}, $\boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n}$.
3. La suite (α_n) est donc croissante. De plus elle est majorée (par e^2) donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$. On note ℓ sa limite.
4. Comme $\alpha_n \to \ell$ et $n \to +\infty$, $\dfrac{2}{n}\alpha_n \to 0$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 2}$ et donc $\boxed{\ell = e^2}$.

B Une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}$ la représentation de f est $\mathscr{C}_0$ la représentation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

5. Tout d'abord $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty}$.
   On écrit $f(x) = \dfrac{2x\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x}\right)}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{2x}\right)$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
6. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(2x - \ln(x))}{4x} = \dfrac{2(2x-1) - (2x - \ln(x))}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{x - 1 + \frac{1}{2}\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$.
   On reconnaît $\boxed{f'(x) = \dfrac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}}$.
7. On a montré que g_1 est négative sur $]0,\alpha_1[$, positive sur $]\alpha_1,+\infty[$. Il en est donc de même pour f'. Ainsi f est décroissante sur $]0,\alpha_1[$ et croissante sur $]\alpha_1,+\infty[$.
8. En reprenant l'expression de la question 5, $f(x) - \sqrt{x} = -\dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$.
   On a alors $f(x) - \sqrt{x})$ qui est négatif et qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}_0$ et ces deux courbes sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.
9. Dessiner $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$.