La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

A Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante [1].

Théorème 1 (*Inégalité arithmético-géométrique*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n .$$

1. Expliquer pourquoi cette inégalité est vraie dans les deux cas particuliers suivants :
   (a) pour $n = 1$,
   (b) pour n quelconque lorsqu'un des nombres a_k est nul.

On supposera donc désormais que $n > 1$ et que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On note $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{m} - 1\right) = 0$.
3. Montrer de la manière de votre choix que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(t) \leqslant t - 1$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leqslant 0$.
5. En déduire l'inégalité souhaitée.

B Inégalité de Carleman

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante [2].

1. Son nom provient des deux types de moyennes qu'elle compare. Étant donnés $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs, la quantité $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ est leur **moyenne arithmétique** tandis que $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$ est leur **moyenne géométrique**.

2. Torsten Carleman, mathématicien suédois de la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle, était reconnu comme un génie et un bon gymnaste, mais il a aussi été reconnu comme un individu taciturne, xénophobe et antisémite. Souvent cynique, il disait qu'*il faudrait abattre les professeurs à l'âge de 50 ans.* C'est, ironiquement, à une jaunisse qu'il a succombé à 56 ans, alors qu'il était professeur à Lund et à Stockholm, directeur de l'institut Mittag-Leffler et membre de l'Académie royale des sciences de Suède.

Théorème 2 (*Inégalité de Carleman*)

> *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}_+$. Alors*
>
> $$\sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

6. Expliquer pourquoi cette inégalité est vraie dans le cas où $N = 1$

On supposera donc désormais que $N > 1$. Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k x_k \quad \text{et} \quad U_n = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

7. Montrer que pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$,

$$U_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} k x_k.$$

8. En déduire que pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$,

$$U_n \leqslant \frac{1}{n!} \left(\frac{T_n}{n} \right)^n.$$

9. (a) Montrer de la manière de votre choix que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

   (b) Démontrer (par exemple par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n+1)^n}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

10. À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\forall 1 \leqslant n \leqslant N, \quad U_n \leqslant \left(\frac{e T_n}{n(n+1)} \right)^n.$$

11. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{N} (U_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{k x_k}{n(n+1)}.$$

12. Donner deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} (U_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{k=1}^{n} k x_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right).$$

13. Conclure.

14. Application : à l'aide d'un choix judicieux des nombres x_k, démontrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{N^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} (n!)^{1/n} \leqslant e$.