Problème 1

1. Soit $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $\sin\left(\dfrac{y}{2}\right) \neq 0$. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Init. Si $n = 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) = 0$ par convention et $\sin\left(\dfrac{ny}{2}\right) = 0$. On a donc bien l'égalité pour $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose l'égalité vérifiée pour n. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky) &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) + \cos(x+ny) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{ny}{2}\right)\cos\left(x+\frac{(n-1)y}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos(x+ny)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{\sin\left(x+\left(n-\frac{1}{2}\right)y\right) - \sin\left(x-\frac{1}{2}y\right) + \sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right) - \sin\left(x+\left(n-\frac{1}{2}\right)y\right)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right) - \sin\left(x-\frac{1}{2}y\right)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)y}{2}\right)\cos\left(x+\frac{ny}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \quad \text{(Formules de factorisation)}
\end{aligned}$$

   L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève l'hérédité.

   D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) = \frac{\sin\left(\frac{ny}{2}\right)\cos\left(x+\frac{(n-1)y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x-\alpha)(x-\beta).$$

   Ainsi $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = \beta$.

   Donc $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont les solutions de l'équation } x^2 - Sx + P = 0.}$

3. (a) Comme $17\theta = \pi$, on a : $\cos(11\theta) = -\cos(\pi - 11\theta) = -\cos((17-11)\theta) = -\cos(6\theta)$.
   Ainsi : $\boxed{a_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) - \cos(6\theta)}$.

   (b) La fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et on a $0 < 3\theta < 6\theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   On en déduit : $0 < \cos(6\theta) < \cos(3\theta) < 1$ donc $\cos(3\theta) - \cos(6\theta) > 0$ et donc $\boxed{a_1 > 0}$.

4. (a) On a $a_1 + a_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \cos((2k+1)\theta)$. D'après la question 1, avec $x = \theta$, $y = 2\theta$ et $n = 8$,

$$a_1 + a_2 = \frac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(16\theta)}{2\sin(\theta)}.$$

Or $\sin(16\theta) = \sin(\pi - 16\theta) = \sin((17-16)\theta) = \sin(\theta)$. D'où $\boxed{a_1 + a_2 = \frac{1}{2}}$.

(b) On développe le produit $a_1 a_2$ et on obtient 16 termes :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 = & \cos(3\theta)\cos(\theta) + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(5\theta)\cos(\theta) + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(7\theta)\cos(\theta) + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(11\theta)\cos(\theta) + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta). \end{aligned}$$

On utilise ensuite les formules de linéarisation puis le fait que

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(k\theta) = -\cos((17-k)\theta) = -\cos((k-17)\theta),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_1 a_2 = & \frac{1}{2}(\cos(4\theta) + \cos(2\theta) + \cos(12\theta) + \cos(6\theta) + \cos(16\theta) + \cos(10\theta) + \cos(18\theta) + \cos(12\theta) \\ & + \cos(6\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(4\theta) + \cos(18\theta) + \cos(8\theta) + \cos(20\theta) + \cos(10\theta) \\ & + \cos(8\theta) + \cos(6\theta) + \cos(16\theta) + \cos(2\theta) + \cos(20\theta) + \cos(6\theta) + \cos(22\theta) + \cos(8\theta) \\ & + \cos(12\theta) + \cos(10\theta) + \cos(20\theta) + \cos(2\theta) + \cos(24\theta) + \cos(2\theta) + \cos(26\theta) + \cos(4\theta)) \\ a_1 a_2 = & \frac{1}{2} \times (-4) \times (\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)) \end{aligned}$$

$\boxed{a_1 a_2 = -2(a_1 + a_2) = -1}$.

(c) On a montré $a_1 + a_2 = \frac{1}{2}$ et $a_1 a_2 = -1$. D'après la question 2, on en déduit que a_1 et a_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$. Or les solutions de cette équation sont $\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ et $\frac{-\sqrt{17}+1}{4}$. Enfin, comme $a_1 > 0$ et $a_1 a_2 < 0$, on en déduit $a_2 < 0$, d'où

$$\boxed{a_1 = \frac{\sqrt{17}+1}{4}} \text{ et } \boxed{a_2 = \frac{-\sqrt{17}+1}{4}}$$

5. (a) On procède comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= \cos(3\theta)\cos(7\theta) + \cos(3\theta)\cos(11\theta) + \cos(5\theta)\cos(7\theta) + \cos(5\theta)\cos(11\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)) \\ &= \frac{-1}{2}(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)) \end{aligned}$$

$\boxed{b_1 b_2 = \frac{-1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{-1}{4}}$.

$$\begin{aligned}
b_3b_4 &= \cos(\theta)\cos(9\theta) + \cos(\theta)\cos(15\theta) + \cos(13\theta)\cos(9\theta) + \cos(13\theta)\cos(15\theta) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)\right) \\
&= \frac{-1}{2}\left(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{b_3b_4 = \frac{-1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{-1}{4}}$.

(b) On a $b_1 + b_2 = a_1$ et $b_1b_2 = \frac{-1}{4}$. D'après la question 2, b_1 et b_2 sont donc les solutions de l'équation $x^2 - a_1x - \frac{1}{4} = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta_1 = a_1^2 + 1 = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{16}$ et ses racines sont : $\frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} + 1}{8}$ et $\frac{-\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} + 1}{8}$. Enfin, on a $b_1 > 0$ et comme $b_1b_2 < 0$, $b_2 < 0$. On en déduit :

$$\boxed{b_1 = \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} + 1}{8}} \text{ et } \boxed{b_2 = \frac{-\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} + 1}{8}}.$$

De la même manière, on a $b_3 + b_4 = a_2$ et $b_3b_4 = \frac{-1}{4}$, donc b_3 et b_4 sont les solutions de l'équation $x^2 - a_2x - \frac{1}{4} = 0$. Comme de plus $b_4 < 0$, on a $b_3 > 0$, et on obtient :

$$\boxed{b_3 = \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1}{8}} \text{ et } \boxed{b_4 = \frac{-\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1}{8}}.$$

6. (a) On a $5^2 < 34 < 6^2$ d'où $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < \sqrt{34} < 6$ et $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} > \sqrt{34} > 5$.
De plus $4^2 < 17 < 5^2$, donc $3 < \sqrt{17} - 1 < 4$. On en déduit que

$$(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < 24 \text{ et } 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} > 40.$$

Par conséquent, $A > 40 - 24 = 16$ $\boxed{> 0}$.

(b) On a :

$$A^2 = \left(18 - 2\sqrt{17}\right)\left(34 - 2\sqrt{17}\right) + 16\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{\left(34 - 2\sqrt{17}\right)\left(34 + 2\sqrt{17}\right)} + 64\left(34 + 2\sqrt{17}\right).$$

Or

$$\left(34 - 2\sqrt{17}\right)\left(34 + 2\sqrt{17}\right) = 34^2 - 4 \times 17 = 4 \times 17^2 - 4 \times 17 = 4 \times 17 \times (17 - 1) = 4 \times 16 \times 17,$$

d'où

$$\sqrt{\left(34 - 2\sqrt{17}\right)\left(34 + 2\sqrt{17}\right)} = 8\sqrt{17}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}A^2 &= 18\times 34 + 4\times 17 - 2(34+18)\sqrt{17} + 16\times 8\sqrt{17} - 16\times 8\times 17 + 64\times 34 + 128\sqrt{17}\\ &= 17\times(36+4-128+128) + 4(-17-9+32+32)\sqrt{17}\\ &= 4\left(170+38\sqrt{17}\right) = 680 + 152\sqrt{17}.\end{aligned}$$

Comme $A > 0$, on en déduit que $\boxed{A = 2\sqrt{170+38\sqrt{17}}}$.

7. D'après les formules de factorisation, $b_1 = 2\cos(\theta)\cos(4\theta) = -2\cos(\theta)\cos(13\theta)$. Donc $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont les solutions de l'équation $x^2 - b_3x - \frac{b_1}{2} = 0$. Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= b_3^2 + 2b_1\\ &= \frac{34+\sqrt{34-2\sqrt{17}} - \sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34+2\sqrt{17}} + 6\sqrt{17}}{32}\\ &= \frac{34+6\sqrt{17}+A}{32}\\ &= \frac{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}{16}\end{aligned}$$

Comme de plus $\cos(\theta) > 0$ et $\cos(13\theta) < 0$, on en déduit le résultat :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}} + \sqrt{34-2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1}{16}}.$$

Remarque. L'importance de ce résultat est immense. Cette expression garantit qu'on peut construire un angle de mesure $\frac{\pi}{17}$ à la règle et au compas. Les questions de constructibilité ont toujours suscité un vif intérêt chez les mathématiciens, mais aussi chez les artistes, architectes, philosophes... Les Grecs se sont heurtés à des problèmes d'ordre géométrique avec la célèbre quadrature du cercle, la trisection de l'angle ou encore la duplication du cube. C'est là un problème de non-constructibilité [1] de nombres donnés : pour ces exemples, π, $\sqrt[3]{2}$ ou encore le cosinus d'un angle, racine d'une équation cubique. Mais quels nombres sont donc constructibles ou non ? On raconte que c'est la découverte de la construction de $\frac{\pi}{17}$ qui donna, à 19 ans à Gauß l'envie de se consacrer aux mathématiques. Cinq ans plus tard, au chapitre VII d'un chef d'œuvre de 500 pages d'une richesse éblouissante, il avance une condition suffisante de constructibilité, mais il faudra attendre plus de 35 ans et les travaux de Pierre-Laurent Wantzel pour finalement montrer qu'elle est nécessaire et suffisante. Ces quelques millénaires d'histoire valent bien quelques jours de calculs...

1. en deux mots : vous disposez d'une longueur de référence, disons 1 unité, d'une règle et d'un compas, et vous souhaitez construire un segment de longueur donnée. Lorsque cela est possible, cette longueur est un nombre **constructible** (à la règle et au compas).