Devoir maison n° 4

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}x) \text{ et } g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1. **Première méthode (utilisant les dérivées)**
   - (a) Rappeler la relation liant $\mathrm{ch}^2 x$ et $\mathrm{sh}^2 x$ pour tout réel x.
   - (b) Donner en justifiant les domaines de définition de f et de g.
   - (c) Préciser les points où f est dérivable et montrer que $f' = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}}$.
   - (d) Faire de même avec la fonction g. (On justifiera le calcul effectué.)
   - (e) En déduire que $f = g$.

2. **Deuxième méthode (trigonométrique)**
   - (a) Donner un exemple de deux réels distincts avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $b \in \left]-\pi,\pi\right[$ et tels que $\tan a = \tan b$.
   - (b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.

     En déduire que pour tout réel x, $\tan(2f(x)) = \mathrm{sh}(x)$.

     On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)$.
   - (c) En étudiant la fonction h (variations, limites...), montrer que $h(x) \in]-1,1[$ pour tout réel x.
   - (d) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.
   - (e) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$, on a : $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.
   - (f) En déduire que pour tout réel x, $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
   - (g) En déduire que $f = g$ (on pourra méditer sur la question a).

3. **Une application de l'égalité entre f et g.**
   - (a) En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$.
   - (b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$ pour $x = \dfrac{\ln 3}{2}$, de quel angle peut-on déduire la tangente ?