

Sol A3.

Calculs algébriques

Solution A3.1

M1 par récurrence.

M2 Soit $n > 1$. $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1/2}{k-1} + \frac{-1}{k} + \frac{1/2}{k+1}$ (facile à vérifier, mais si on ne l'a jamais rencontré, la première méthode est préférable).

Puis on met en lumière deux télescopes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1/2}{k-1} + \frac{-1}{k} + \frac{1/2}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k} \right) + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{4n(n+1)}. \end{aligned}$$

Solution A3.6

1. Voir TD A1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\left\lfloor \frac{2x}{2^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

On reconnaît un télescope. Ainsi $S = \left\lfloor \frac{2x}{2^{n+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

L'intérêt de ce résultat grandit lorsqu'on examine sa limite : cette somme tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

Solution A3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va décomposer $\llbracket 0, n^2 - 1 \rrbracket = \{0\} \cup \llbracket 1, 3 \rrbracket \cup \llbracket 4, 8 \rrbracket \cup \dots$. Autrement dit

$$\llbracket 0, n^2 - 1 \rrbracket = \bigcup_{i=0}^{n-1} \llbracket i^2, (i+1)^2 - 1 \rrbracket.$$



Or pour $i \in \llbracket 0, n^2 - 1 \rrbracket : \forall k \in \llbracket i^2, (i+1)^2 - 1 \rrbracket, \lfloor \sqrt{k} \rfloor = i$.

En effet $i^2 \leq k < (i+1)^2$, d'où $i \leq k < i+1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)^2 - i^2)i \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1)i \\
 &= 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

La simplification est laissée au lecteur.