$\boxed{\textbf{Problème 1}}$ *(d'après EDHEC 2012 ECS)*

# A Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante.

**Théorème 1 (*Inégalité arithmético-géométrique*)**

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n$ nombres $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n.$$

1. Cette inégalité est vraie dans les deux cas particuliers suivants :
   (a) pour $n = 1$, $\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1$ et $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^1 = a_1$ ;
   (b) lorsqu'un des nombres $a_k$ est nul, on a $\prod_{k=1}^{1} a_k = 0$ et $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k$.
2. On note $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Ainsi, $n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} a_k$ ($m > 0$ car les $a_k$ le sont).
   $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n = \boxed{0}$.
3. M1 Étudier la fonction $t \mapsto \ln(t) - t + 1$ et montrer qu'elle est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   M2 Utiliser la concavité de ln, $y = t - 1$ étant l'équation de sa tangente en 1.
   M3 Démontrer (via M1 ou M2) l'inégalité $e^t \geqslant t + 1$ et appliquer ln, croissante.
4. Pour tout $k$, $\ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leqslant \frac{a_k}{m} - 1$. Donc $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{m} - 1\right)\boxed{\leqslant 0}$.
5. Or $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{a_k}{m}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)\right) - n\ln(m)$. Donc $\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k) \leqslant n\ln(m)$.
   En composant avec exp, on obtient $\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n}$.

# B Inégalité de Carleman

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante.

**Théorème 2 (*Inégalité de Carleman*)**

*Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n$ nombres $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{n=1}^{N} \left( \prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

6. Cette inégalité est vraie dans le cas où $N = 1$ car alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{1} \left( \prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} = x_1$ et on a bien $x_1 \leqslant e x_1$.

On supposera désormais que $N > 1$. Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k x_k \quad \text{et} \quad U_n = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

7. Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, $\displaystyle\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} k x_k = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n!} n! \prod_{k=1}^{n} x_k = \boxed{U_n}$.

8. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k x_k \leqslant \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k x_k \right)^n = \left( \frac{T_n}{n} \right)^n$.

   Donc $\boxed{U_n \leqslant \dfrac{1}{n!} \left( \dfrac{T_n}{n} \right)^n}$.

9. (a) $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or d'après 3, $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

   Donc $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(n \times \frac{1}{n}\right) \boxed{\leqslant e}$.

   (b) $\boxed{\text{Init.}}$ Pour $n = 1$, on a bien $2 = \left(1 + \dfrac{1}{1}\right)$.

   $\boxed{\text{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

   $$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)}.$$

   On a bien $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}$, ce qui achève la récurrence.

10. On a $\displaystyle U_n \leqslant \frac{1}{n!} \left(\frac{T_n}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{T_n}{n(n+1)}\right)^n = \left( \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right) \left(\frac{T_n}{n(n+1)}\right)^n$.

    Or pour tout $k$, $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leqslant e$. Donc $\boxed{U_n \leqslant \left(\dfrac{e T_n}{n(n+1)}\right)^n}$.

11. Donc $\displaystyle(U_n)^{1/n} \leqslant \frac{e T_n}{n(n+1)} = e \sum_{k=1}^{n} \frac{k x_k}{n(n+1)}$. Finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (U_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{k x_k}{n(n+1)}}$.

12. On a $\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{kx_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{kx_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{N} kx_k \sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

Par somme télescopique, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(U_n)^{1/n} \leqslant e\sum_{k=1}^{N} kx_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right).}$

13. On a $kx_k\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{N+1}\right) = x_k \underbrace{\left(1 - \dfrac{k}{N+1}\right)}_{\leqslant 1} \leqslant x_k$.

Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e\sum_{k=1}^{N} x_k}$, l'inégalité de Carleman.

14. En choisissant $x_k = k$ pour tout $k$, $U_n = n!$ et $S_N = \dfrac{N(N+1)}{2}$. Or $N \leqslant N^2$, donc $N^2 + N \leqslant 2N^2$ et donc $S_N \leqslant N^2$.

D'après l'inégalité de Carleman, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(n!)^{1/n} \leqslant eS_N$ et finalement $\boxed{\displaystyle\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}(n!)^{1/n} \leqslant e}$.