DEVOIR MAISON N° 5

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans ce problème, on étudie une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit régulier. Après quelques classiques (partie A) et quelques variations autour de l'inégalité triangulaire (partie B), on en viendra à la condition proprement dite (partie C). On reviendra dans la partie C à l'étude du cas où le polygone en question est un triangle.

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b.
   (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.
   (b) Soit D d'affixe d tel que $\dfrac{d-a}{d-b} = i$ et F d'affixe f tel que $\dfrac{f-a}{f-b} = -i$. Montrer que $ADBF$ est un carré.
2. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité triangulaire :

$$\forall z,z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leqslant |z| + |z'|. \tag{1}$$

Le but de cette partie est d'étudier le cas de plus de deux nombres et les cas d'égalité. En particulier, on va montrer qu'il y a égalité si et seulement si les nombres considérés ont même argument.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$ et tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$,
$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| \tag{2}$$
4. Cas d'égalité pour $n = 2$.
   (a) Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) = |z_1||z_2|$.
   (b) En déduire que l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.
5. On suppose que l'on a la propriété au rang n, c'est à dire :
$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \text{ si et seulement si } \arg(z_1) = \ldots = \arg(z_n)[2\pi].$$
   Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que
$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

(a) Montrer que

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \quad \text{et} \quad |z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Indication : on pourra poser $z = z_1 + \ldots + z_n$, $z' = z_{n+1}$ *et utiliser judicieusement* (1) *et* (2).

(b) En déduire que $\arg(z_1) = \ldots = \arg(z_{n+1})[2\pi]$. Conclure.

C Caractérisation d'un polygone régulier

Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ vérifiant $|z_1| = \ldots = |z_n| = \rho > 0$.

On dit que le polygone (parcouru dans le sens direct) $M_1 \ldots M_n$ est **régulier** si

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \ldots = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}) = (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}.$$

On va montrer que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.
   (a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, déterminer le module et un argument de z_k.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.
7. On suppose maintenant réciproquement que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.
   (a) Calculer $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right|$. En déduire que

   $$\forall k \in \{1 \ldots n\},\ \arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1)[2\pi].$$

   (b) En déduire que le polygone est régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2 c = 0$.

8. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.
9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2 c = 0$. En déduire que le triangle ABC a deux côtés égaux et un angle de mesure $\pm\dfrac{\pi}{3}$. Conclure.
10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

(a) Dans le cas où $|a| = |b| = |c|$, montrer comment la condition de la partie C implique que $a + jb + j^2c = 0$. *(indication : on pourra appliquer cette condition à a, b et c, puis à b, c et a, et encore à c, a et b)*

(b) Dans le cas où a, b et c ne sont pas de même module, on pose

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}\ ;\ b' = b - \frac{a+b+c}{3} \text{ et } c' = c - \frac{a+b+c}{3}.$$

Montrer que $a' + jb' + j^2c' = 0$ si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Montrer que $|a'| = |b'| = |c'|$ et conclure.

Problème 2

A Première équation

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et qui vérifient :

$$(E_1)\ :\ \forall a,b \in \mathbb{R}, f(a+b) = f(a) + f(b).$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 qui vérifie (E_1). On pose $\lambda = f(1)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$. *(indication : montrer $\forall x_0,x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) + f(x - x_0)$, puis faire tendre x vers x_0.)*
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$. *(indication : montrer le résultat par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ puis traiter le cas $n < 0$.)*
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \lambda x$.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$. *(indication : utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.)*
2. Conclure.

B Deuxième équation

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 qui vérifient $f(0) = 0$ et :

$$(E_3)\ :\ \forall a,b \in \mathbb{R}, f(a) + f(b) = f(a+b)\left(1 + f(a)f(b)\right).$$

3. (a) Rappeler la définition de la fonction th.
   (b) Montrer que th vérifie (E_3).
   (c) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On notera argth $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa réciproque.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 qui vérifie $f(0) = 0$ et (E_3).
   (a) Montrer que f est impaire et que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$.
   (b) On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 1$. En déduire une contradiction. *(indication : montrer la première partie par récurrence sur n, puis utiliser la continuité en 0 pour obtenir une contradiction.)*
   (c) En déduire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in]-1,1[$. *(indication : commencer par montrer $\forall y \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \dfrac{2y}{1+y^2} \leqslant 1$, puis utiliser les questions précédentes pour conclure.)*
   (d) On pose $g = \operatorname{argth} \circ f$. Montrer que g vérifie (E_1), en déduire une expression de f.
5. Conclure.