

Problème 1

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x) \text{ et } g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1 + \operatorname{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

Première méthode (utilisant les dérivées)

- on a $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- sh , ch et Arctan sont définies sur \mathbb{R} .
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) \in \mathbb{R}$ donc par composition, f est définie sur \mathbb{R} .
 - $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \operatorname{ch}x \neq 0$ car $\operatorname{ch}x \geq 1$. Par quotient puis par composition, g est définie sur \mathbb{R} .
- Par les mêmes arguments, f et g sont dérivables sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 x} \cdot \operatorname{ch}x = \frac{\operatorname{ch}x}{2(1 + \operatorname{sh}^2 x)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}x}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sh}x}{1 + \operatorname{ch}x}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}x(1 + \operatorname{ch}x) - \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}x}{(1 + \operatorname{ch}x)^2}.$$

En simplifiant, comme $1 + \operatorname{ch}x \neq 0$, on obtient également $g'(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}x}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x)$, i.e. $(f - g)'(x) = 0$, donc $f - g$ est constante. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que $f - g$ est constante égale à 0, donc $f = g$.

Deuxième méthode (trigonométrique)

- Par exemple $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$.
- $\operatorname{Im}(\operatorname{Arctan}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) < \frac{\pi}{2}$.
Ainsi $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
 $\tan(2f(x)) = \tan(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = \operatorname{sh}(x)$.
- La fonction $h : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}x}{1 + \operatorname{ch}x}$ est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec, comme au début, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \operatorname{ch}x \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{\operatorname{ch}x(1 + \operatorname{ch}x) - \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}x}{(1 + \operatorname{ch}x)^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}x}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$, donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

Un calcul de limites (à détailler) donne $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \in]-1, 1[}$.

4. La fonction Arctan est strictement croissante et ses valeurs particulières en 1 et -1 donnent $\operatorname{Arctan}(] - 1, 1[) =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[}$

5. Voir cours. $\boxed{\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, \tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(2g(x)) = \frac{2 \tan(g(x))}{1 - \tan^2(g(x))}$. Or $\tan(g(x)) = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}$. Donc $\tan(2g(x)) = \frac{2 \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}}{1 - \left(\frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}\right)^2}$.

On simplifie : $\tan(2g(x)) = \frac{2 \operatorname{sh}(x)(1 + \operatorname{ch}(x))}{(1 + \operatorname{ch}(x))^2 - \operatorname{sh}^2(x)} = \boxed{\operatorname{sh}(x)}$.

7. On a montré $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, donc $\operatorname{Arctan}(\tan(2f(x))) = \operatorname{Arctan}(\tan(2g(x)))$.

Or $2f(x)$ et $2g(x)$ sont des éléments de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Donc $\operatorname{Arctan}(\tan(2f(x))) = 2f(x)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan(2g(x))) = 2g(x)$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, i.e. $\boxed{f = g}$.

Application de l'égalité $f = g$

1. $\operatorname{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

2. En utilisant l'égalité $f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = g\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$, on obtient $\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right)$.

Cela donne $\frac{\pi}{12} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 2}\right)$, soit $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = 2 - \sqrt{3}}$.