Chapitre B2

Nombres réels et suites numériques

Objectifs

- Définition d'une suite.
- Expression des suites usuelles.
- Appréhender la notion de borne supérieure ou inférieure, l'identifier dans des cas simples.
- Notion de limite d'une suite.
- Plan et méthodes pour l'étude d'une suite.

Notation. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Suites numériques

1.1 Généralités

Définition B2.1

On appelle **suite** à valeurs dans $\mathbb{K}$ une famille de nombre réels ou complexes indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}.$$

On note alors $u_n = u(n)$, appelé **terme général** de la suite.

Notations. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et une suite u sera le plus souvent définie par son terme général et notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Remarque. Une suite peut être simplement définie à partir d'un certain rang (àpcr) n_0. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition B2.2

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ les opérations de **somme**, **produit** et **multiplication par un scalaire** par

- $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$,
- $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$,
- $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$.

Définition B2.3 (Ordre)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **majorée** lorsque l'ensemble de ses termes est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M;$$

(ii) **minorée** lorsque l'ensemble de ses termes est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n;$$

(iii) **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est **bornée** lorsque $(|u_n|)$ est majorée.

Définition B2.4 (Monotonie)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1};$$

(ii) **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n;$$

(iii) **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

(iv) On dit que (u_n) est **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes.

Remarque. On aura souvent simplement besoin de vérifier ces propriétés **à partir d'un certain rang**, c'est à dire que la propriété en question sera vraie pour tout $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite constante à partir d'un certain rang s'appelle une suite **stationnaire**.

1.2 Suites usuelles

Définition B2.5

Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition B2.6

Soit $r \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors
- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$,
- (ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Définition B2.7

Soit $q \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison q lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$.

Proposition B2.8

Soit $q \in \mathbb{K}^*$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors
- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$,
- (ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Définition B2.9

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe $a \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{K}^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode d'étude :

- Si $a = 1$, se ramener à l'étude d'une suite arithmétique.
- Si $a \neq 1$, trouver c tel que $c = ac + b$ (**point fixe** de la relation).

  Détail.

  $$\begin{aligned} c = ac + b \quad &\Leftrightarrow \quad c(1-a) = b \\ &\Leftrightarrow \quad c = \boxed{\frac{b}{1-a}} \end{aligned}$$

- $(w_n) = (u_n - c)$ est géométrique de raison a.

  Détail.

  Soit $w_n = u_n - c$ pour tout n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - c \\ &= au_n + b - c \\ &= au_n + b - (ac + b) \\ &= a(u_n - c) \\ &= \boxed{aw_n} \end{aligned}$$

- Exprimer w_n en fonction de n.
- En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Détail.

(w_n) est géométrique de raison a. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = a^n w_0$.
Donc $u_n - c = a^n(u_0 - c)$, soit $u_n = a^n(u_0 - c) + c$.
Finalement, $\boxed{u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}}$.

1.3 Étude d'une suite récurrente linéaire à deux termes

Définition B2.10

(i) On dit (u_n) vérifie une **relation de récurrence linéaire à deux termes** (ou **d'ordre 2**) s'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a, c \neq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

(ii) Dans ce cas, on appelle **équation caractéristique** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Théorème B2.11

Avec les notations ci-deussus, soit (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée.

(i) Cas complexe.
- Si $\Delta > 0$, soit q_1 et q_2 ses deux solutions réelles.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q_1^n + \mu q_2^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta = 0$, soit q son unique solution réelle.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q^n + \mu n q^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Cas réel.
- Si $\Delta > 0$, soit q_1 et q_2 ses deux solutions réelles.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q_1^n + \mu q_2^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta = 0$, soit q son unique solution réelle.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q^n + \mu n q^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta < 0$, soit $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ ses deux solutions complexes conjuguées.
  Alors $(u_n) \in \{\rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.

Méthode d'étude pour $\begin{cases} u_0, u_1 \text{ donnés} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \end{cases}$:

- Écrire et résoudre l'**équation caractéristique** : $ax^2 + bx + c = 0$.

- En fonction de Δ, donner les solutions générales (voir théorème ci-dessus).
- À l'aide de u_0 et u_1, trouver les deux constantes (via un système à deux équations).

Remarque.

- La relation $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ s'appelle **relation de récurrence linéaire d'ordre 2**.
- Si $a = 0$ ou $c = 0$, la suite (u_n) est simplement géométrique.
- Très souvent, on aura $a = 1$ et la relation sera donnée sous la forme $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$.

2 Bornes supérieure et inférieure

Définition B2.12 (Bornes supérieure et inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence,
(i) on appelle **borne supérieure** de A le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.
(ii) on appelle **borne inférieure** de A le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

Notations. On note $\sup A$ et $\inf A$ ces éléments.

Proposition B2.13

(i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
(ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition B2.14 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre
(i) $s = \sup A$;
(ii) s est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $s - \varepsilon < a$.
(iii) s est un majorant de A et $\forall x < s$, $\exists a \in A$, $x < a$.

Remarque. De même on a équivalence entre

(i) $i = \inf A$;

(ii) i est un minorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in A$, $b < i + \varepsilon$.

(iii) i est un minorant de A et $\forall x > i$, $\exists b \in A$, $b < x$.

3 Convergence, divergence

3.1 Limites

Définition B2.15

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Si un tel ℓ existe, on dit que la suite est **convergente** et sinon on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque. Variante réelle : une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Notamment, on peut interpréter $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Définition B2.16

On dit qu'une suite réelle (u_n) **tend vers** $+\infty$ (et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$

On dit qu'une suite réelle (u_n) **tend vers** $-\infty$ (et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

Remarque. On peut aussi donner la formulation suivante : (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Théorème et définition B2.17 (Unicité de la limite)

Soit $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$ et soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ et vers ℓ'. Alors $\ell = \ell'$. Ce nombre s'appelle alors **la limite** de la suite (u_n) et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque. Même chose dans le cas réel d'une limite infinie, avec la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$).

3.2 Premières propriétés

Proposition B2.18

La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Proposition B2.19

Toute suite convergente est bornée.

Remarque. Une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) n'est pas majorée (resp. pas minorée). En particulier, elle diverge.

Proposition B2.20 (Compatibilité avec la relation d'ordre)

(i) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $u_n \in [a, b]$ àpcr, alors $\ell \in [a, b]$.

(ii) Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Si $u_n \leqslant v_n$ àpcr, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque. Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Proposition B2.21

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

- Si $\ell \neq a$, alors $u_n \neq a$ àpcr.
- Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\ell > 0$, alors $u_n \neq 0$ (et même $u_n > 0$ àpcr).

3.3 Opérations sur les limites

Lemme B2.22

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.

Proposition B2.23 (Somme, produit)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

(i) la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$;

(ii) la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Proposition B2.24 (Inverse)

Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors la suite $(1/u_n)$ est bien définie àpcr et converge vers $1/\ell$.

Proposition B2.25

— Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers $+\infty$. Alors $(1/u_n)$ converge vers 0.

— Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers 0. Alors $(1/u_n)$ diverge. De plus,

➢ si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$,

➢ si $u_n \in \mathbb{R}_-^*$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$,

Proposition B2.26

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

Proposition B2.27 (Module)

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Théorème B2.28 (Encadrement, gendarmes)

Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose

➢ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ àpcr,

➢ (u_n) et (w_n) convergent toutes deux vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors (v_n) converge également vers ℓ.

Remarque. Un cas particulier : Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $|u_n| \leqslant v_n$ àpcr et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3.4 Suites extraites

Définition B2.29

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (v_n) est une **suite extraite** ou une **sous-suite** de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition B2.30

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Remarque. En particulier pour montrer qu'une suite bornée n'est pas convergente, il suffit de trouver deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes.

Proposition B2.31

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors (u_n) tend vers ℓ.

Théorème B2.32 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

3.5 Monotonie

Théorème B2.33 (Limite monotone)

(i) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante.
- Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

(ii) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
- Si (u_n) est minorée, alors elle converge vers $\ell = \inf\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Définition B2.34 (Suites adjacentes)

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante,

(iii) $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème B2.35

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) tendent vers la même limite ℓ qui, de plus, vérifie $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dém. B2.35

- $(v_n - u_n)$ est décroissante d'après les variations de (u_n) et (v_n).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$ car $(v_n - u_n)$ décroît vers 0.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi (u_n) est majorée (par v_0) et (v_n) minorée (par u_0).

- (u_n) et (v_n) convergent. Soit ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' - \ell$ donc $\ell' - \ell' = 0$ par unicité de la limite.
- $\ell = \sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

3.6 Traduction séquentielle de propriétés analytiques

Théorème B2.36 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) X est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$

Théorème B2.37 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de A. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) $s = \sup(A)$.

(ii) s est un majorant de A et $\exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$

Théorème B2.38 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $a \in D$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Méthodes

- Déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique en se ramenant à une suite géométrique.
- Déterminer l'expression d'une suite récurrente d'ordre 2 en passant par son expression caractéristique.
- Enlever une valeur absolue en distinguant les cas.
- Déterminer une borne supérieure ou inférieure.
- Déterminer la limite d'une suite
  - ➢ par calcul direct,
  - ➢ par croissances comparées,
  - ➢ par encadrement...
- Montrer la convergence d'une suite
  - ➢ en calculant sa limite (*cf. supra*),
  - ➢ par limite monotone.
- Montrer la divergence d'une suite
  - ➢ en calculant sa limite (*cf. supra*),
  - ➢ en étudiant des suites extraites.