DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Dans les deux premières parties de ce problème, et sauf indication contraire, même les questions portant sur des résultats de cours doivent naturellement faire l'objet d'une démonstration complète.

A Fonctions hyperboliques classiques

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ et $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$. De même exprimer e^x en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
2. Démontrer (par exemple à l'aide de ce qui précède) pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, les formules
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) &= (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) \\ \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) &= (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \end{aligned}$$
3. En déduire pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ une expression de $\operatorname{ch}(x+y)$ et de $\operatorname{sh}(x+y)$.

B Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique (notée th) par l'expression $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

4. Effectuer l'étude complète de la fonction th (notamment ensemble de définition, dérivée, variations, limites, asymptotes éventuelles et l'équation d'une tangente remarquable au choix, puis une allure de sa courbe représentative).
5. Déduire de ce qui précède que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I avec I un intervalle à préciser.
6. Montrer que $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.

C Argument tangente hyperbolique

On a mis au jour dans la partie précédente le caractère bijectif de la fonction th. On appelle $\operatorname{argth} : I \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

7. Montrer que argth est impaire et calculer sa dérivée.
8. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{argth} x$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$.
9. En déduire une expression de argth avec la fonction ln et retrouver ainsi la formule de sa dérivée.
10. On considère maintenant la fonction
$$f : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}\right).$$

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

(b) On pose $y = \operatorname{ch} x$. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

(c) En déduire que $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

11. Montrer que si $x,y \in I$, alors $\dfrac{x+y}{1+xy} \in I$. En déduire que pour tous $x,y \in I$,

$$\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y = \operatorname{argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

12. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\dfrac{1}{k+1} - \operatorname{argth}\dfrac{1}{k+2}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$. Déterminer une expression simple de S_n.

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Problème 2

Étant donnés deux nombres réels α et β, on considère les équations

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(1-x) = \alpha \qquad (E_\alpha)$$

$$\text{et} \qquad \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1-x) = \beta. \qquad (F_\beta)$$

Pour résoudre ces équations, on va d'abord (questions 1 et 2) se ramener à étudier une seule des deux. Puis (questions 3 et 4) nous déterminerons le nombre de solutions à l'équation (E_α). Enfin, nous donnerons les solutions recherchées (partie C) sous une forme simplifiée à l'aide d'un calcul trigonométrique (partie B) où il aura été nécessaire de se plonger dans $\mathbb{C}$. Les résultats des questions non résolues peuvent être admis afin de poursuivre le problème.

A Étude quantitative des solutions

1. Le but de cette question est d'établir un lien entre les deux équations étudiées.

(a) Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que x est solution de (F_β) si et seulement s'il est solution de (E_α), où α est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de β.

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(1-x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct.

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

(b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = \dfrac{1}{2}$.

(c) Montrer que sur $]0,1[$, f est dérivable et donner son tableau de variations. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.*(On rappelle qu'on n'attend pas le tracé d'une calculatrice, mais une allure donnée par l'étude qui précède)*

3. Déterminer en fonction de α le nombre de solutions de (E_α).

B L'outil complexe

Soit z un nombre complexe de partie réelle strictement positive.

4. Montrer que z admet un argument $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$
5. Étant donné $\alpha \in]-\pi,\pi[$, on appelle
$$Z_\alpha = \sqrt{1+\cos(\alpha)} + i\sqrt{1-\cos(\alpha)}.$$
Calculer Z_α^2.
6. En déduire le module et l'argument de Z_α. *(attention au signe de α)*
7. Déduire des questions précédentes que
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in [0,\pi[, \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in]-\pi,0[. \end{cases}$$

C Expression des solutions

On choisit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (E_α) admette au moins une solution.

8. Montrer que x est solution de (E_α) si et seulement s'il est solution de
$$x^2 - x + \frac{\cos^2(\alpha)}{2(1+\cos(\alpha))} = 0.$$
Indication : on pourra remarquer que (E_α) s'écrit $\mathrm{Arccos}(1-x) = \alpha - \mathrm{Arccos}(x)$ *et composer avec une fonction bien choisie.*
9. Résoudre l'équation ci-dessus et en déduire que les solutions de (E_α) sont
$$\left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2\cos(\alpha)+1}}{2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}.$$

Problème 3

Prérequis

1. Montrer que pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$, $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$ et $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, si $p < q$, alors $|z^p| < |z^q|$.

A Première équation

Soit $n \geqslant 2$. On considère l'équation suivante (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) :

$$z^n + z + 1 = 0 \tag{E_n}$$

Le but de cette partie est de montrer que ses solutions sont toutes de module strictement inférieur à 2.

3. Dans le cas $n = 2$:
   (a) Résoudre l'équation (E_2).
   (b) Justifier que ses solutions sont de module strictement inférieur à 2.
4. Dans le cas $n = 3$:
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
   Effectuer l'étude de la fonction f et en déduire que (E_3) admet une unique solution réelle, que l'on notera a. Montrer que $a \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.
   (b) On admet que $f(x)$ se factorise alors $f(x) = (x - a)(x - z_1)(x - z_2)$, où z_1 et z_2 sont les deux autres solutions complexes de (E_3). Montrer que $z_1 + z_2 = -a$ et $z_1 z_2 = -\frac{1}{a}$.
   (c) Montrer que $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$ et donner de la même manière un encadrement de $|z_1 z_2|$.
   (d) Démontrer par l'absurde que $|z_1| < 2$ *(indication : dans le cas contraire, on pourra montrer que $|z_1| < 1 + |z_2|$ et aboutir à une contradiction).*
   (e) Montrer que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à 2.
5. Cas général : soit $n \geqslant 2$.
   (a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$. Effectuer l'étude de ses variations, limites et en déduire son signe.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E_n). Montrer que $|z^n| \leqslant |z| + 1$ et en déduire que $|z| < 2$.

B Une équation plus générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs tels que $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Le but du problème est de montrer que les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose aussi $A(z) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k$.

6. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, |A(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$
7. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|A(z)| \leqslant a_n |z|^n$.
8. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, |(z - 1)P(z)| \geqslant a_n |z^{n+1}| - |A(z)|.$$
9. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|(z - 1)P(z)| \geqslant a_n |z|^n (|z| - 1)$.
10. Conclure.