Sol A4.
Nombres complexes

Solution A4.15

1. $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.
   On remarque que $(1+i)^n=\overline{(1-i)^n}$, donc $(1+i)^n+(1-i)^n=2\operatorname{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right)$.
   Donc $(1+i)^n+(1-i)^n=\sqrt{2}^n\times 2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.
   À distinguer suivant les valeurs de n (le reste de sa division par 8) :
   - Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)>0$, alors c'est le module et l'argument est nul,
   - Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)<0$, alors le module est son opposé et l'argument vaut π,
   - Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)=0$, le module est nul et il n'y a pas d'argument.
2. Avec $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, le nombre à calculer B vaut :
   $B=\dfrac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}}+\dfrac{4e^{-i\pi}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i\pi/4}+\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=2\sqrt{2}\cos(\pi/4)=2.$

Exercice A4.17

1. On utilise Euler puis la formule du binôme (puissance 4), enfin à nouveau Euler (avec $\cos(4t)$ et $\cos(2t)$).
   $f(t)=\dfrac{1}{8}\cos(4t)+\dfrac{1}{2}\cos(2t)+\dfrac{3}{8}$.
2. Même démarche : $g(t)=\dfrac{1}{16}\sin(5t)-\dfrac{5}{16}\sin(3t)+\dfrac{5}{8}\sin(t)$.
3. Tout d'abord $\sin^3(t)=-\dfrac{1}{4}\sin(3t)+\dfrac{3}{4}\sin(t)$. Puis on multiplie par $\cos(t)$ et on utilise les formules de linéarisation.
   Ou bien on s'arrête aux exponentielles : $\sin^3(t)\cos(t)=-\dfrac{1}{16i}(e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it})(e^{it}+e^{-it})$ et on développe puis on utilise Euler (avec $\sin(4t)$ et $\sin(2t)$).
   Les deux voies mènent à $h(t)=-\dfrac{1}{8}\sin(4t)+\dfrac{1}{4}\sin(2t)$.
4. $k(t)=-\dfrac{1}{8}\sin(9t)+\dfrac{3}{8}\sin(5t)+\dfrac{1}{8}\sin(3t)-\dfrac{3}{8}\sin(t)$.

Exercice A4.18

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:
   (a) $\cos(5x)+i\sin(5x)=(\cos(x)+i\sin(x))^5$ et on développe avec la formule du binôme.
   La partie réelle donne $\cos(5x)=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$. Puis on remplace $\sin^2$ par $1-\cos^2$ (et donc bien sûr $\sin^4$ par $(1-\cos^2)^2$).
   Après regroupements : $\cos(5x)=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.
   (b) $\sin(6x)\sin(x)=-32\cos^7 x+64\cos^5 x-38\cos^3 x+12\cos x$.
2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:
   (a) Même chose en remplaçant cette fois $\cos^2$ par $1-\sin^2$.
   $\sin(7x)=-64\sin^7 x+12\sin^5 x-56\sin^3 x+7\sin x$.
   (b) $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$ et $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$.
   D'où $\sin(3x)\cos(2x)=8\sin^5 x-10\sin^3 x+3\sin x$.