Problème 1

A Fonctions hyperboliques classiques

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \boxed{1}$.
   Et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{e^{-x}}$. De même, $\boxed{e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   - $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = \boxed{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)}$.
   - $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) == e^{x+y} = e^x e^y \boxed{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)}$.
3. En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient
   - $\operatorname{ch}(x+y) = \dfrac{1}{2}\left((\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) + (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)\right) = \boxed{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$.
   - $\operatorname{sh}(x+y) = \dfrac{1}{2}\left((\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\right) = \boxed{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}$.

B Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique (notée th) par l'expression $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

4. Par quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, comme ch ne s'annule pas, th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a $\operatorname{th}' = \dfrac{\operatorname{sh}' \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$, qui est toujours positive, donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\boxed{\operatorname{th} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\boxed{\operatorname{th} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$.
   Ces limites donnent deux asymptotes horizontales, d'équations $y = -1$ et $y = 1$, respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.
   La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
5. th est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante.
   Donc elle réalise une $\boxed{\text{bijection, de } \mathbb{R} \text{ dans } \operatorname{Im}(\operatorname{th}) =]-1,1[}$.

6. Soit $x,y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} &= \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}}{1 + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}}{\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}} \\
&= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} \\
&= \frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)} \\
&= \boxed{\operatorname{th}(x+y)}.
\end{aligned}$$

C Argument tangente hyperbolique

On a mis au jour dans la partie précédente le caractère bijectif de la fonction th. On appelle argth : $I \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

7. argth est définie sur $]-1,1[$, centré en 0.
Soit $y \in]-1,1[$. Soit $x = \operatorname{argth}(y)$, *i.e.* $y = \operatorname{th}(x)$.
Par imparité de th, $\operatorname{argth}(-y) = \operatorname{argth}(-\operatorname{th}(x)) = \operatorname{argth}(\operatorname{th}(-x)) = -x = -\operatorname{argth}(y)$.
Donc $\boxed{\text{argth est impaire}}$.
De plus les limites de th donnent $\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{argth}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{argth}(x) = \infty$.
th est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc argth est dérivable sur $I =]-1,1[$.
Et $\forall x \in I$, $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))}$.
En utilisant $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, on obtient $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))^2} = \boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$.

8. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{argth}(x)$.
$\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)} = \dfrac{\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y)-\operatorname{sh}(y)} = \dfrac{2e^y}{2e^{-y}} = \boxed{e^{2y}}$.

9. Ainsi $\boxed{\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$.
Cette expression est celle d'une fonction dérivable sur I par composition, car $\forall x \in I$, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
Soit $v : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, définie et dérivable sur I. On a $\forall x \in I$, $v'(x) = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.
Donc $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{v'(x)}{v(x)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(1+x)(1-x)} = \boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$.

10. On considère maintenant la fonction

$$u : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} -1}{\operatorname{ch} +1}}\right).$$

(a) u est définie sur $\mathbb{R}$ par composition. En effet :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$ donc $\operatorname{ch}(x) - 1 \geqslant 0$, donc $\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1} \geqslant 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par composition.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \operatorname{ch}(x) - 1 \leqslant \operatorname{ch}(x) + 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1} \leqslant 1$, d'où $\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}} \in I$. Donc par composition, u est bien définie $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$.

(b) Soit $x \in \mathcal{D}_u$. On pose $t = \operatorname{ch}(x)$. D'après l'expression de 9,
$u(x) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1 + \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}}{1 - \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}} \right) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}} \right)$. On multiplie par la quantité conjuguée pour avoir finalement : $u(x) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{(\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1})^2}{2} \right)$.

En développant le carré, $\boxed{u(x) = \dfrac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}$.

(c) On utilise $t = \operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On a alors $t^2 - 1 = \dfrac{e^{2x} + e{-}2x + 2}{4} - 1 = \dfrac{e^{2x} + e{-}2x - 2}{4} = \operatorname{sh}^2(x)$.

Ainsi $\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = |\operatorname{sh}(x)|$. Donc $\boxed{u(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\operatorname{ch}(x) + |\operatorname{sh}(x)|\right)}$.

On utilise que $\operatorname{sh}(x)$ est positif si $x > 0$, négatif ou nul sinon.

- Si $x > 0$, $u(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\right) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{2e^x}{2} \right) = \dfrac{x}{2}$.
- Si $x \leqslant 0$, $u(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\right) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{2e^{-x}}{2} \right) = -\dfrac{x}{2}$.

Cela donne dans tous les cas $\boxed{u(x) = \dfrac{|x|}{2}}$.

11. Soit $x,y \in I$.

(a) On observe que $1 + xy - (x + y) = (x - 1)(y - 1)$.
Comme $x < 1$ et $y < 1$, on a $x - 1 < 0$ et $y - 1 < 0$, d'où $(x - 1)(y - 1) > 0$.
Cela montre $1 + xy - (x + y) > 0$, soit $1 + xy > x + y$.
Comme $1 + xy > 0$, on a $\dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.
De même on a $1 + xy + (x + y) = (x + 1)(y + 1) > 0$ qui permet de montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$.
Finalement, $\boxed{\dfrac{x+y}{1+xy} \in I}$.
Pour tous $x,y \in I$, posons $a = \operatorname{argth}(x)$ et $b = \operatorname{argth}(y)$. On a montré en question 3 que $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
Ainsi $\operatorname{argth}\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = \operatorname{argth}(\operatorname{th}(a+b)) = a + b = \boxed{\operatorname{argth}(x) + \operatorname{argth}(y)}$.

12. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique ce qui précède à $x = \dfrac{1}{k+1}$ et $y = -\dfrac{1}{k+2}$, qui sont bien des éléments de $]-1,1[$.

Or $\dfrac{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{k+1}\frac{1}{k+2}} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)-1} = \dfrac{1}{k^2+3k+1}$.

Donc $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)+\operatorname{argth}\left(-\dfrac{1}{k+2}\right) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)$ et par imparité de argth, on a exactement $\boxed{\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)-\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+2}\right)}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)$.

Par télescopage, on obtient $S_n = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$.

(c) Par imparité (ou en calculant $\operatorname{th}(0)=0$), on sait que $\operatorname{argth}(0)=0$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{2}\right)}$.

Si on le souhaite, on peut calculer cette valeur en résolvant l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{1}{2}$. On obtient $e^{2x}=3$, soit la valeur de la limite : $\boxed{\dfrac{\ln(3)}{2}}$.

Problème 2

Étant donnés deux nombres réels α et β, on considère les équations

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(1-x) = \alpha \qquad (E_\alpha)$$

$$\text{et} \quad \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1-x) = \beta. \qquad (F_\beta)$$

A Étude quantitative des solutions

1. Le but de cette question est d'établir un lien entre les deux équations étudiées.

(a) **M1** Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ définie et dérivable sur $]-1,1[$ par somme de fonctions dérivables. On a $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x)=0$. Ainsi f est constante sur $]-1,1[$ (car c'est est un intervalle). Or $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

On vérifie aussi $f(-1)=f(1)=\dfrac{\pi}{2}$ pour compléter.

M2 Soit $x \in [-1,1]$. On calcule à l'aide des formules d'addition :

- D'une part $\sin(\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}+x^2 = 1$.
- D'autre part $\cos(\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x) = x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} = 0$.

Donc $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$. Or $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. La seule valeur valide est donc $\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}}$.

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (F_\beta) &\Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1-x) = \beta \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(x) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) = \beta \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \pi - \beta \\ &\Leftrightarrow \boxed{x \text{ est solution de } (E_\alpha), \text{ où } \alpha = \pi - \beta}. \end{aligned}$$

2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(1-x).$$
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $1 - x \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in [0,2]$. Donc par composition $x \mapsto \operatorname{Arccos}(1-x)$ est définie sur $[0,2]$.
   Comme Arccos est définie sur $[-1,1]$, par somme, f est définie sur $[0,1]$.
   (b) On vérifie que $\forall x \in [0,1], f(1-x) = f(x)$ (ou que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} - x\right)$). Ceci montre que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est symétrique par rapport à la droite } x = \frac{1}{2}}$.
   (c) $\forall x \in [0,1]$, $(x \in]-1,1[$ et $1 - x \in]-1,1[) \Leftrightarrow x \in]0,1[$. Donc par composition de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,1[}$. $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$.
   On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 - (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
   À l'aide d'une valeur ou de la limite $(+\infty)$ en 0, on obtient que $\forall x \leqslant \frac{1}{2}$, $f'(x) \geqslant 0$ et par conséquent (par symétrie), $\forall x \geqslant \frac{1}{2}$, $f'(x) \leqslant 0$. L'allure de $\mathscr{C}_f$ devra faire apparaître le maximum en $\frac{1}{2}$ (égal à $2\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$), la symétrie et la non-dérivabilité en 0 et 1 (demi-tangente verticale).
3. f est continue sur $]0,1[$ et peut même être prolongée par continuité en 0 et en 1. Elle est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
D'après le théorème de la bijection, $\boxed{(E_\alpha) \text{ possède deux solutions sur } [0,1] \text{ si } \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \frac{2\pi}{3}}$.
Elle a $\boxed{\text{une unique solution } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ si } \alpha = \frac{2\pi}{3}}$ et $\boxed{\text{aucune solution sinon}}$.

B L'outil complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de partie réelle $x > 0$.

4. Sous forme trigonométrique, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ avec $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|}$.
Comme $\dfrac{x}{|z|} \in]0,1]$, on peut calculer $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{|z|}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
$\cos(\alpha) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{|z|}\right)\right) \Leftrightarrow \alpha = \pm\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{|z|}\right) [2\pi]$.

Si $y \geqslant 0$, on pose $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right)$, sinon on pose $\theta = -\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right)$.

Dans les deux cas, $\boxed{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et est un argument de } z}$.

Dans ce cas, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \boxed{\dfrac{y}{x}}$.

5. Étant donné $\alpha \in]-\pi,\pi[$, on appelle $Z_\alpha = \sqrt{1+\cos(\alpha)} + i\sqrt{1-\cos(\alpha)}$.
   $Z_\alpha^2 = 1+\cos(\alpha) - (1-\cos(\alpha)) + 2i\sqrt{(1+\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha))} = 2\cos(\alpha) + 2i\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$.
   Donc $\boxed{Z_\alpha^2 = 2\cos(\alpha) + 2i|\sin(\alpha)|}$.

6. $|Z_\alpha| = \sqrt{1+\cos(\alpha+1-\cos(\alpha)} = \boxed{\sqrt{2}}$.
   Si $\alpha > 0$, $Z_\alpha^2 = 2(\cos(\alpha)+\sin(\alpha) = 2e^{i\alpha}$, donc $Z_\alpha = \pm\sqrt{2}e^{i\alpha/2}$, *i.e.* $\operatorname{Arg}(Z_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ ou $\frac{\alpha}{2}+\pi$.
   Si $\alpha < 0$, $Z_\alpha^2 = 2(\cos(\alpha)-\sin(\alpha) = 2e^{-i\alpha}$, donc $Z_\alpha = \pm\sqrt{2}e^{-i\alpha/2}$, *i.e.* $\operatorname{Arg}(Z_\alpha) = -\frac{\alpha}{2}$ ou $-\frac{\alpha}{2}+\pi$.
   Comme $\operatorname{Re}(Z_\alpha) > 0$, $\operatorname{Arg}(Z_\alpha) = -\frac{\alpha}{2}$.
   Dans les deux cas : $\boxed{\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{|\alpha|}{2}}$.
   Remarque. On peut aussi s'épargner la disjonction de cas en remarquant que $|\sin(\alpha)| = \sin(|\alpha|)$ et en utilisant la formule de $\tan(\operatorname{Arg}(z))$.

7. D'après la forme algébrique de Z_α et la question 4, on a $\tan\left(\frac{|\alpha|}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{1-\cos(\alpha)}}{\sqrt{1+\cos(\alpha)}}$.
   Par imparité de tan, cela donne $\boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in [0,\pi[, \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} & \text{si } \alpha \in]-\pi,0[. \end{cases}}$.

C Expression des solutions

On choisit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (E_α) admette au moins une solution.

8. Remarquons tout d'abord que (E_α) n'a pas de solution si $\alpha \notin [0,\pi]$. En effet, on cherche des $x \in [0,1]$ pour que $\operatorname{Arccos}(x)$ et $\operatorname{Arccos}(1-x)$ soient bien définis. Dans ce cas $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(1-x) \in [0,\pi]$.

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } (E_\alpha) &\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(1-x) = \alpha - \operatorname{Arccos}(x) \\
&\Leftrightarrow \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = \cos\left(\alpha - \operatorname{Arccos}(x)\right) \text{ car cos est bijective sur } [0,\pi] \\
&\Leftrightarrow 1-x = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)\sin(\operatorname{Arccos}(x)) \\
&\Leftrightarrow 1-(1+\cos(\alpha))x = \sin(\alpha)\sqrt{1-x^2} \\
&\Leftrightarrow (1-(1+\cos(\alpha))x)^2 = \sin^2(\alpha)(1-x^2) \text{ car tout ce petit monde est positif} \\
&\Leftrightarrow (2+2\cos(\alpha))x^2 - 2(1+\cos(\alpha))x + 1 - \sin^2(\alpha) = 0 \text{ après regroupements} \\
&\Leftrightarrow \boxed{x^2 - x + \frac{\cos^2(\alpha)}{2(1+\cos(\alpha))} = 0}.
\end{aligned}$$

9. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = 1 - 2\frac{\cos^2(\alpha)}{(1+\cos(\alpha))} = \frac{1+\cos(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{(1+2\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha))}{1+\cos(\alpha)}.$$

D'où $\sqrt{\Delta} = \sqrt{2\cos(\alpha)+1}\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Donc les solutions de (E_α) sont $\boxed{\left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2\cos(\alpha)+1}}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}}$.

Problème 3

Prérequis

1. Pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$, $|z| = |z+z'-z'| \leqslant |z+z'| + |z'|$ donc $\boxed{|z| - |z'| \leqslant |z+z'|}$. On applique cette inégalité avec $-z'$ à la place de z' pour obtenir l'autre relation.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, si $p < q$, alors $|z^p| = |z|^p < |z|^q \boxed{< |z^q|}$.

A Première équation

Soit $n \geqslant 2$. On considère l'équation suivante (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) :

$$z^n + z + 1 = 0 \qquad (E_n)$$

3. Dans le cas $n = 2$:
   (a) $(E_2) : z^2 + z + 1$ a pour solutions $\boxed{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$, soit $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.
   (b) Ces solutions sont toutes deux $\boxed{\text{de module } 1}$.
4. Dans le cas $n = 3$:
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $f(-1) = -1$ et $f(-1/2) = -\frac{5}{8} + 1 = \frac{3}{8}$. Donc f réalise une bijection sur $\mathbb{R}$ et en particulier sa restriction à $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ également, à valeurs dans $\left]-1, \frac{3}{8}\right[$ qui contient 0.
   D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f(x) = 0 \text{ admet une unique solution réelle } a \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[}$.
   (b) On admet que $f(x)$ se factorise alors $f(x) = (x-a)(x-z_1)(x-z_2)$, où z_1 et z_2 sont les deux autres solutions complexes de (E_3).
   En développant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - (a + z_1 + z_2)x^2 + (az_1 + az_2 + z_1z_2)x - az_1z_2$.
   On identifie les coefficients des monômes de degrés 2 et 0 : $\begin{cases} a + z_1 + z_2 = 0 \\ -az_1z_2 = 1 \end{cases}$.

   Ainsi $\boxed{\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1z_2 = -\frac{1}{a} \end{cases}}$.

(c) $|z_1+z_2| = |a|$ et $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2} < |z_1+z_2| < 1}$.

De même, $|z_1 z_2| = \left|\dfrac{1}{a}\right|$ et $-2 < \dfrac{1}{a} < -1$ donc $\boxed{1 < |z_1 z_2| < 2}$.

(d) Supposons $2 \leqslant |z_1|$. Alors $2|z_2| \leqslant |z_1||z_2| < 2$ d'après ce qui précède. Donc $|z_2| < 1$.
D'autre part, $|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_2|$ (inégalité triangulaire). Donc $|z_1| < 1+|z_2| < 2$, ce qui est absurde.

(e) On a montré par l'absurde que $\boxed{|z_1| < 2}$. Un raisonnement identique montre que $\boxed{|z_2| < 2}$ (les deux racines ne sont pas différenciées). On a aussi $\boxed{|a| < 2}$ d'après l'encadrement précédent.

5. Cas général : soit $n \geqslant 2$.

(a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme un polynôme. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$.

1$^{\text{er}}$ cas : n est pair. Alors $n-1$ est impair

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ (on notera a_n cette valeur). Et $f_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant a_n$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi, f_n est décroissante puis croissante. $f_n(0) < 0$ donc on sait que f_n change de signe sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, en α et β.

x	$-\infty$		α		0		a_n		β		$+\infty$
$f_n'(x)$				$-$			0		$+$		
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus $f_n(-2) > 0$ et $f_n(2) > 0$ donc $-2 < \alpha$ et $\beta < 2$.

2$^{\text{e}}$ cas : n est impair. Alors $n-1$ est pair

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm a_n$ et $f_n'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [-a_n, a_n]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$-a_n$		0		a_n		γ		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f_n admet un minimum négatif en a_n. On peut donc garantir un changement de signe sur $\mathbb{R}_+$ en γ, avec $\gamma < 2$ car $f_n(2) > 0$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E_n). Alors $z^n = -z-1$. D'après l'inégalité triangulaire, $|z^n| \leqslant |z|+1$, donc $|z|^n - |z| - 1 \leqslant 0$.

L'étude du signe de f_n nous dit que pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leqslant 0 \Rightarrow x < 2$ (dans les deux cas). Donc $\boxed{|z| < 2}$.

B Une équation plus générale

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose aussi $A(z) = -a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k$.

6. D'après l'inégalité triangulaire (valable avec un nombre quelconque de termes : le montrer par récurrence pour s'en convaincre) :
$$\forall z \in \mathbb{C}, |A(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}||z^k| + |a_0|.$$
Or $a_0 \geqslant 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $a_k - a_{k-1} \geqslant 0$.
Donc $\boxed{|A(z)| \leqslant a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})|z|^k}$.
7. Si $|z| > 1$, alors $|z|^k \leqslant |z|^n$ pour $k \leqslant n$ (question 2).
Finalement, dans ce cas, $\boxed{|A(z)| \leqslant a_n |z|^n}$.
8. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$(z-1)P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k + a_n z_{n+1} = a_n z^{n+1} + A(z)$.
D'après 1, $\boxed{|(z-1)P(z)| \geqslant a_n |z^{n+1}| - |A(z)|}$.
9. En combinant ces deux derniers résultats dans le cas où $|z| > 1$, on a $|(z-1)P(z)| \geqslant a_n|z|^{n+1} - a_n|z^n|$, d'où $\boxed{|(z-1)P(z)| \geqslant a_n |z|^n (|z| - 1)}$.
10. Si $P(z) = 0$, alors cela donne $|z| - 1 \leqslant 0$, d'où $\boxed{|z| \leqslant 1}$.