

**Problème 1**

Ce problème a pour but de démontrer quelques propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes. Pas d'inquiétude, la plupart des notions de géométrie utiles remontent à la seconde ou à la première. Elles sont rappelées par des petits paragraphes clairement identifiés **Rappel**.

**Notations.** Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Un point  $M$  du plan est repéré par ses coordonnées  $(x, y)$  et on lui associe une affixe  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . De la même manière, un nombre complexe  $z = x + iy$  est aussi l'affixe d'un vecteur  $\vec{u}$  de composantes  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

**Rappel.** Étant donnés deux vecteurs  $\vec{u}_1(x_1, y_1)$  et  $\vec{u}_2(x_2, y_2)$  non nuls, on dit que les deux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux lorsqu'ils dirigent deux droites perpendiculaires. On dit qu'ils sont colinéaires lorsqu'ils dirigent deux droites parallèles (ou confondues).

**A Généralités**

Soit  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

1. Montrer que la mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  est un argument de  $\frac{z_2}{z_1}$ .

2. Montrer que :

- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$ .

- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires si et seulement si  $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$

3. Montrer que :

- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 0$ .

- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires si et seulement si  $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = 0$

On pourra librement utiliser dans la suite ces caractérisations.

**B Propriété des médiatrices**

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan non alignés, d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ . On note  $\Delta_{AB}, \Delta_{AC}$  et  $\Delta_{BC}$  les médiatrices des segments  $[AB], [AC]$  et  $[BC]$

**Rappel.** La médiatrice du segment  $[AB]$  est l'ensemble des points équidistants de  $A$  et  $B$ . Elle est perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et passe par le milieu de  $[AB]$ .

4. Montrer qu'un point  $M$  d'affixe  $z$  appartient à  $\Delta_{AB}$  si et seulement si :

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (b - a)\bar{z} = b\bar{b} - a\bar{a}.$$

5. De manière analogue, donner (sans calcul) les conditions d'appartenance à  $\Delta_{AC}$  et  $\Delta_{BC}$ .

6. Justifier que  $\Delta_{AB}$  et  $\Delta_{AC}$  sont sécantes et montrer que leur point d'intersection a pour affixe

$$\omega = \frac{ab(\bar{b} - \bar{a}) + bc(\bar{c} - \bar{b}) + ac(\bar{a} - \bar{c})}{a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{c} - c\bar{b} + c\bar{a} - a\bar{c}}.$$

On note  $\Omega$  le point d'affixe  $\omega$ .

7. Justifiez le résultat bien connu suivant : les médiatrices du triangle  $ABC$  sont concourantes (en  $\Omega$ ).

## C Droite de Simson

On poursuit avec les mêmes notations et les résultats (éventuellement admis) de la partie précédente.

8. Justifier que  $|a - \omega| = |b - \omega| = |c - \omega|$  et en donner une interprétation géométrique. On note  $r$  ce

module commun. En déduire qu'il existe trois nombres réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que 
$$\begin{cases} a = \omega + re^{i\alpha} \\ b = \omega + re^{i\beta} \\ c = \omega + re^{i\gamma} \end{cases} .$$

9. (a) Donner le module et un argument de  $c - b$  (on pourra penser à l'astuce de l'angle moitié). Justifier que  $\beta$  et  $\gamma$  sont distincts modulo  $2\pi$ . On montre de même que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont distincts modulo  $2\pi$ .

(b) Exprimer  $\frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}}$  en fonction de  $\beta$  et  $\gamma$ .

10. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  qui n'est pas sur les côtés du triangle  $ABC$ . On note  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  ses projetés orthogonaux sur les droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  respectivement.

**Rappel.** Le projeté du point  $M$  sur  $(BC)$  est le point  $A'$  de la droite  $(BC)$  tel que  $(MA')$  et  $(BC)$  soient perpendiculaires.

(a) Que peut-on dire des vecteurs  $\overrightarrow{MA'}$  et  $\overrightarrow{BC}$ ? Des vecteurs  $\overrightarrow{BA'}$  et  $\overrightarrow{BC}$ ? Et des vecteurs  $\overrightarrow{CA'}$  et  $\overrightarrow{BC}$ ?

(b) En déduire que 
$$\begin{cases} (a' - z)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{a}' - \bar{z})(c - b) = 0 \\ (a' - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{a}' - \bar{b})(c - b) = 0 \\ (a' - c)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{a}' - \bar{c})(c - b) = 0 \end{cases} .$$
 (on pourra penser à la question 3)

(c) En déduire que  $a' = \frac{z + b}{2} - \frac{\bar{z} - \bar{b}}{2}e^{i(\beta + \gamma)} = \frac{z + c}{2} - \frac{\bar{z} - \bar{c}}{2}e^{i(\beta + \gamma)}$ .

(d) Donner, sans calcul, des expressions analogues pour  $b'$  et  $c'$  en fonction de  $a, b, c, \alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

11. (a) Exprimer  $c' - b'$  sous forme de produit, donner sans calcul une formule analogue pour  $a' - c'$  puis montrer que

$$\frac{c' - b'}{a' - c'} = e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)} \times \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{z} - \bar{b}}.$$

(b) À l'aide des expressions de la question 8, exprimer  $\bar{a}e^{i(\alpha - \beta)} - \bar{b}$  et  $be^{i(\alpha - \beta)} - a$  en fonction de  $\omega, \alpha$  et  $\beta$ .

(c) Montrer, toujours à l'aide de la question 8, que  $\bar{a}be^{i(\alpha - \beta)} - a\bar{b} = (\omega\bar{\omega} - r^2)(e^{i(\alpha - \beta)} - 1)$ .

(d) Déduire de tout cela que  $\frac{c' - b'}{a' - c'}$  est réel si et seulement si  $z\bar{z} - z\bar{\omega} - \bar{z}\omega + \omega\bar{\omega} - r^2 = 0$ .

(e) Conclusion : montrer que  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés si et seulement si  $M$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

Lorsque c'est réalisé, la droite reliant  $A', B'$  et  $C'$  est appelée **droite de Simson** du point  $M$ , du nom du mathématicien écossais Robert Simson. Mais le résultat est en fait dû à William Wallace.

**Problème 2**

On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

**Rapide étude de  $f$** 

1. Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer sa dérivée.
2. Montrer que  $f'$  est du même signe que  $h : x \mapsto x \cos x - \sin x$ .
3. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note par la suite encore  $f$  ce prolongement.
4. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et déterminer  $f'(0)$ .

**Un théorème d'analyse**

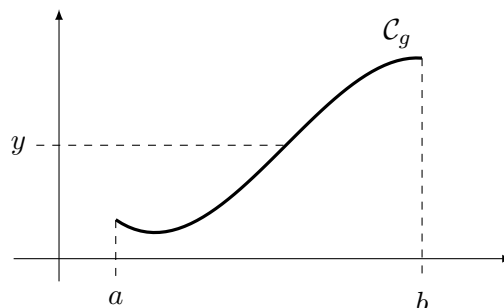
Soit  $a < b$  des réels et une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ . On suppose  $g(a) \leq g(b)$  et on pose  $y \in [g(a), g(b)]$ . Le but de cette partie est de montrer que  $y$  admet un antécédent  $c \in [a, b]$  par  $g$ . On présente deux méthodes différentes (il est donc bien sûr interdit d'utiliser des résultats de la question 6 dans la question 7).

5. Effectuer un dessin expliquant la situation.
6. Première méthode : on définit  $A = \{x \in [a, b], g(x) \leq y\}$ .
  - (a) Montrer que  $A$  admet une borne supérieure. On note  $c = \sup(A)$ .
  - (b) Justifier qu'il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  telle que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$ .
  - (c) Montrer que  $g(c) \leq y$ .
  - (d) Montrer que  $g(c) \geq y$ . (on pourra vérifier que c'est immédiat si  $c = b$  et examiner plus précisément le cas  $c < b$ ).
7. Deuxième méthode : on définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de la manière suivante.

Tout d'abord  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Puis pour  $n \in \mathbb{N}$ , si  $a_n$  et  $b_n$  sont définis, alors on calcule  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Si  $g(c_n) \leq y$ , on pose  $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$ . Sinon, on pose  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$ .

- (a) Placer sur l'axe des abscisses (sur le dessin suivant ou après l'avoir reproduit) les valeurs  $a_i$  et  $b_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .



- (b) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite que l'on notera  $c$ .
  - (c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq y \leq g(b_n)$ . En déduire que  $g(c) = y$ .
8. Comment établir le résultat dans le cas où  $g(a) \geq g(b)$  ?

## Une suite

9. Déterminer le signe de  $f'(k\pi)$  en fonction de  $k \in \mathbb{N}^*$ .
10. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $a_k \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  tel que  $f'(a_k) = 0$ .
11. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $h$  est strictement monotone sur  $]k\pi, (k+1)\pi[$  (on pourra dériver  $h$  et on discutera suivant la parité de  $k$ ). En déduire que les réels  $a_k$  sont uniques.
12. Comportement (limite éventuelle et un équivalent) de la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ .
  - (a) Déterminer la limite de la suite  $(a_k)$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .
  - (b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{k\pi}$ .
  - (c) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = \tan(a_k - k\pi)$ . En déduire que  $a_k - k\pi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ .

## Une autre suite

On s'intéresse maintenant à la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

13. Effectuer l'étude complète de  $(u_n)$ . Indications :
  - On pourra montrer que  $[0,1]$  est un intervalle stable par  $f$ .
  - On montrera que  $f$  admet un unique point fixe sur  $[0,1]$  à l'aide d'une étude de  $u(x) = f(x) - x$ . Pour montrer que  $u$  est strictement monotone, on pourra montrer que  $u'(x)$  est du signe de  $v(x) = x \cos(x) - \sin(x) - x^2$  et dériver  $v$  pour finir l'étude.
  - On pourrait avoir besoin d'étudier séparément les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .