

Problème 1

Ce problème a pour but de démontrer quelques propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes. Pas d'inquiétude, la plupart des notions de géométrie utiles remontent à la seconde ou à la première. Elles sont rappelées par des petits paragraphes clairement identifiés **Rappel**.

Notations. Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un point M du plan est repéré par ses coordonnées (x, y) et on lui associe une affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. De la même manière, un nombre complexe $z = x + iy$ est aussi l'affixe d'un vecteur \vec{u} de composantes (x, y) dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Rappel. Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}_1(x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2(x_2, y_2)$ non nuls, on dit que les deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux lorsqu'ils dirigent deux droites perpendiculaires. On dit qu'ils sont colinéaires lorsqu'ils dirigent deux droites parallèles (ou confondues).

A Généralités

Soit \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 .

1. Montrer que la mesure de l'angle orienté (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.

2. Montrer que :

- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.
- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$

3. Montrer que :

- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 0$.
- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires si et seulement si $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = 0$

On pourra librement utiliser dans la suite ces caractérisations.

B Propriété des médiatrices

Soit A, B et C trois points du plan non alignés, d'affixes respectives a, b et c . On note Δ_{AB}, Δ_{AC} et Δ_{BC} les médiatrices des segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$

Rappel. La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B . Elle est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le milieu de $[AB]$.

4. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à Δ_{AB} si et seulement si :

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (b - a)\bar{z} = b\bar{b} - a\bar{a}.$$

5. De manière analogue, donner (sans calcul) les conditions d'appartenance à Δ_{AC} et Δ_{BC} .

6. Justifier que Δ_{AB} et Δ_{AC} sont sécantes et montrer que leur point d'intersection a pour affixe

$$\omega = \frac{ab(\bar{b} - \bar{a}) + bc(\bar{c} - \bar{b}) + ac(\bar{a} - \bar{c})}{a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{c} - c\bar{b} + c\bar{a} - a\bar{c}}.$$

On note Ω le point d'affixe ω .

7. Justifiez le résultat bien connu suivant : les médiatrices du triangle ABC sont concourantes (en Ω).

C Droite de Simson

On poursuit avec les mêmes notations et les résultats (éventuellement admis) de la partie précédente.

8. Justifier que $|a - \omega| = |b - \omega| = |c - \omega|$ et en donner une interprétation géométrique. On note r ce

module commun. En déduire qu'il existe trois nombres réels α , β et γ tels que
$$\begin{cases} a = \omega + re^{i\alpha} \\ b = \omega + re^{i\beta} \\ c = \omega + re^{i\gamma} \end{cases} .$$

9. (a) Donner le module et un argument de $c - b$ (*on pourra penser à l'astuce de l'angle moitié*). Justifier que β et γ sont distincts modulo 2π . On montre de même que α , β et γ sont distincts modulo 2π .

(b) Exprimer $\frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}}$ en fonction de β et γ .

10. Soit M un point d'affixe z qui n'est pas sur les côtés du triangle ABC . On note A' , B' et C' ses projetés orthogonaux sur les droites (BC) , (AC) et (AB) respectivement.

Rappel. Le projeté du point M sur (BC) est le point A' de la droite (BC) tel que (MA') et (BC) soient perpendiculaires.

(a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et \overrightarrow{BC} ? Des vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et \overrightarrow{BC} ? Et des vecteurs $\overrightarrow{CA'}$ et \overrightarrow{BC} ?

(b) En déduire que
$$\begin{cases} (a' - z)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{a}' - \bar{z})(c - b) = 0 \\ (a' - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{a}' - \bar{b})(c - b) = 0 \\ (a' - c)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{a}' - \bar{c})(c - b) = 0 \end{cases} .$$
 (*on pourra penser à la question 3*)

(c) En déduire que $a' = \frac{z + b}{2} - \frac{\bar{z} - \bar{b}}{2}e^{i(\beta + \gamma)} = \frac{z + c}{2} - \frac{\bar{z} - \bar{c}}{2}e^{i(\beta + \gamma)}$.

(d) Donner, sans calcul, des expressions analogues pour b' et c' en fonction de a, b, c, α, β et γ .

11. (a) Exprimer $c' - b'$ sous forme de produit, donner sans calcul une formule analogue pour $a' - c'$ puis montrer que

$$\frac{c' - b'}{a' - c'} = e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)} \times \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{z} - \bar{b}} .$$

(b) À l'aide des expressions de la question 8, exprimer $\bar{a}e^{i(\alpha - \beta)} - \bar{b}$ et $be^{i(\alpha - \beta)} - a$ en fonction de ω, α et β .

(c) Montrer, toujours à l'aide de la question 8, que $\bar{a}be^{i(\alpha - \beta)} - a\bar{b} = (\omega\bar{\omega} - r^2)(e^{i(\alpha - \beta)} - 1)$.

(d) Déduire de tout cela que $\frac{c' - b'}{a' - c'}$ est réel si et seulement si $z\bar{z} - z\bar{\omega} - \bar{z}\omega + \omega\bar{\omega} - r^2 = 0$.

(e) Conclusion : montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

Lorsque c'est réalisé, la droite reliant A', B' et C' est appelée **droite de Simson** du point M , du nom du mathématicien écossais Robert Simson. Mais le résultat est en fait dû à William Wallace.

Problème 2

On définit la fonction f par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Rapide étude de f

1. Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f' est du même signe que $h : x \mapsto x \cos x - \sin x$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note par la suite encore f ce prolongement.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Un théorème d'analyse

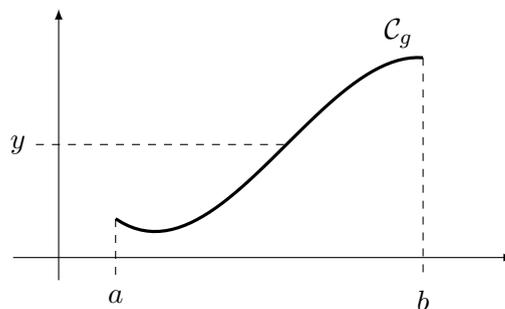
Soit $a < b$ des réels et une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. On suppose $g(a) \leq g(b)$ et on pose $y \in [g(a), g(b)]$. Le but de cette partie est de montrer que y admet un antécédent $c \in [a, b]$ par g . On présente deux méthodes différentes (il est donc bien sûr interdit d'utiliser des résultats de la question 6 dans la question 7).

5. Effectuer un dessin expliquant la situation.
6. Première méthode : on définit $A = \{x \in [a, b], g(x) \leq y\}$.
 - (a) Montrer que A admet une borne supérieure. On note $c = \sup(A)$.
 - (b) Justifier qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$.
 - (c) Montrer que $g(c) \leq y$.
 - (d) Montrer que $g(c) \geq y$. (on pourra vérifier que c'est immédiat si $c = b$ et examiner plus précisément le cas $c < b$).
7. Deuxième méthode : on définit les suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante.

Tout d'abord $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$, si a_n et b_n sont définis, alors on calcule $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Si $g(c_n) \leq y$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$. Sinon, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$.

- (a) Placer sur l'axe des abscisses (sur le dessin suivant ou après l'avoir reproduit) les valeurs a_i et b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.



- (b) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite que l'on notera c .
 - (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq y \leq g(b_n)$. En déduire que $g(c) = y$.
8. Comment établir le résultat dans le cas où $g(a) \geq g(b)$?

Une suite

9. Déterminer le signe de $f'(k\pi)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.
10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(a_k) = 0$.
11. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, h est strictement monotone sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ (on pourra dériver h et on discutera suivant la parité de k). En déduire que les réels a_k sont uniques.
12. Comportement (limite éventuelle et un équivalent) de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.
 - (a) Déterminer la limite de la suite (a_k) quand k tend vers $+\infty$.
 - (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{k\pi}$.
 - (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \tan(a_k - k\pi)$. En déduire que $a_k - k\pi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Une autre suite

On s'intéresse maintenant à la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

13. Effectuer l'étude complète de (u_n) . Indications :
 - On pourra montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable par f .
 - On montrera que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$ à l'aide d'une étude de $u(x) = f(x) - x$. Pour montrer que u est strictement monotone, on pourra montrer que $u'(x)$ est du signe de $v(x) = x \cos(x) - \sin(x) - x^2$ et dériver v pour finir l'étude.
 - On pourrait avoir besoin d'étudier séparément les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .