Sol B2.
Nombres réels et suites numériques

Exercice B2.3

Indications et solutions.

1. Effectuer la somme et la différence des deux relations pour exprimer (u_n+v_n) (arithmético géométrique) et $(u_n - v_n)$ (arithmétique). Puis exprimer ces deux suites en fonction de n. En déduire les expressions de u_n et v_n pour tout n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n. On obtient $v_{n+2} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}v_{n+1}$.

   Exprimer alors v_n en fonction de n pour tout n, puis utiliser $u_n = \frac{3}{4}\left(v_{n+1} - \frac{5}{3}v_n\right)$.

   Finalement (sauf erreur), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)$ et $v_n = -\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\right)$.

Exercice B2.7 ✻

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure le minimum et le maximum des ensembles suivants.

4. Soit $E_4 = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.
   - $\sup(E_4) = 2$ car $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant 2$ et $2 \in E_4$ (avec $m = n = 1$). C'est aussi un maximum.
   - $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \geqslant 0$. Donc $\inf(E_4) \geqslant 0$.

     De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \in E_4$. Ainsi $\left(\frac{2}{n}\right)$ est une suite d'éléments de E_4 qui tend vers 0. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(E_4) = 0$. E_4 n'a pas de minimum.
5. Soit $E_5 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

   $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \frac{3}{2}$. Or $u_2 = \frac{3}{2}$. Donc $\sup(E_5) = \frac{3}{2}$. C'est aussi le maximum de E_5.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant -1$. Et $u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

   D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(E_5) = -1$. E_5 n'a pas de minimum.
6. Soit $E_6 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$.

   On résout l'inéquation : $E_6 = \mathbb{Q} \cap]1,2[$.

   $\forall x \in E_6$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.

   Comme $\mathbb{Q} \cap]1,2[$ est dense dans $[1,2]$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$), il existe une suite d'éléments de E_6 qui tend vers -1 et une autre qui tend vers 2.

   Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure/supérieure, on a $\sup(E_6) = 2$ et $\inf(E_6) = 1$. E_6 n'a ni maximum ni minimum.

Exercice B2.10

Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \, b \in B\}.$$

Soit $x \in A+B$. $\exists (a,b) \in A \times B$, $x = a+b$. Or $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$.
Donc $x \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Donc $A+B$ est majoré par $\sup(A)+\sup(B)$.
D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on dispose de $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^*$ telles que $a_n \to \sup A$ et $b_n \to \sup B$.
Alors $(a_n + b_n) \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ et $a_n + b_n \to \sup A + \sup B$.
D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice B2.11

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in A \cup B$.
   Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
   Si $x \notin A$, alors $x \in B$ et donc $x \leqslant \sup B \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
   Dans les deux cas, $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$, qui majore donc $A \cup B$.
   Notons $s = \max(\sup A, \sup B)$ et supposons que $s = \sup A$ (l'autre cas se traitera de manière analogue).
   Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété de la borne sup, on dispose de $a \in A$ tel que $a > s - \varepsilon$.
   Comme $a \in A \cup B$, cela donne aussi un élément de $A \cup B$ vérifiant $a > s - \varepsilon$.
   On a donc vérifié la caractérisation de la borne supérieure pour $A \cup B$. Ainsi $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
3. Quant à $A \cap B$, on n'est pas sûr qu'il soit non vide.
   Cependant, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$.

Exercice B2.17 *Critère de d'Alembert*

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

1. Supposons $\ell < 1$. Soit $a \in]\ell, 1[$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell$ àpcr. Notons N un tel rang.
   $\forall k \geqslant N$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant a$. Comme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} > 0$, on peut effectuer les produits : $\forall n > N$, $\displaystyle\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod_{k=N}^{n-1} a$, *i.e.* $\dfrac{u_n}{u_N} \leqslant a^{n-N}$.
   Finalement $u_n \leqslant a^{n-N} u_N$ et par comparaison, comme $a < 1$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. Même principe, les détails sont laissés au lecteur : on montre que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > b$ àpcr, avec $b > 1$, puis on en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
3. Dans le cas où $\ell = 1$, donner trois exemples de suite (u_n) tels que
   (a) $u_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $u_n = n$, (c) $u_n = 28$.

Exercice B2.18

Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers ℓ.
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ dans la définition : on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \geqslant N$.

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - u_n| &= |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \\
&\leqslant |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| \\
&\leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&\leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Or $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{Z}$ donc $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, donc $|u_{n+1} - u_n| = 0$ et donc (u_n) est constante à partir du rang N.

Exercice B2.19

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Supposons que $(\sin n)$ converge, disons vers ℓ. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$, d'où $\cos(n) = \dfrac{1}{\sin(1)}(\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)$ qui converge aussi, vers $\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\ell$. Bien sûr ça marche pareil dans l'autre sens.
   Autrement dit, soit ces deux suites sont convergentes, soit elles sont toutes deux divergentes.

2. Supposons que $\cos n \to \ell_1$ et $\sin n \to \ell_2$.

   M1 : avec des formules trigo.

   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n)$, on a $\ell_2 = 2\ell_1\ell_2$, donc $\ell_2 = 0$ ou $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, donc on a $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$.
   Ceci donne deux possibilités : soit $\ell_2 = 0$ et alors $\ell_1 = 1$, soit $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$ et alors $\ell_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Mais on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, d'où $\ell_1 = \ell_1^2 - 1$, compatible avec aucune des valeurs précédentes. Donc les deux suites sont divergentes.

   M2 : avec des extractions.

   On a aussi $\cos(n+1)$ et $\cos(n-1)$ qui tendent vers ℓ_1.
   Or $\cos(n+1) = \cos(1)\cos(n) - \sin(1)\sin(n)$ et $\cos(n-1) = \cos(1)\cos(n) + \sin(1)\sin(n)$.
   La somme de ces deux lignes donne $\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(1)cos(n)$ d'où, en passant à la limite : $2\ell_1 = 2\cos(1)\ell_1$, d'où $\ell_1 = 0$ car $\cos(1) \neq 0$.
   Mais alors $\cos(n+1) = \cos(1)\cos(n) - \sin(1)\sin(n)$ (par exemple) donne $\ell_2 = 0$, tout ceci étant contradictoire avec (par exemple) $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$, obtenu comme dans M1.