Sol B1.
Études de fonctions

Exercice B1.14

Indications et résultats.

5. D'après l'ensemble de définition et de dérivabilité et les points d'annulation de la fonction tangente, f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.
   f_5 est π-périodique car tan l'est donc on peut limiter l'étude à $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   De plus f_5 est impaire donc on l'étudie sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   En 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, on a une limite égale à $+\infty$, d'où une asymptote verticale.
   $\forall x \in I,\ f_5'(x) = 1 + \tan^2 x - \dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan^2 x} = \dfrac{\tan^4 x - 1}{\tan^2 x}$.
   f_5' est négative sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, positive sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, nulle en $\dfrac{\pi}{4}$.
   D'où les variations de f_5 sur I, décroissante puis croissante, avec un minimum égal à 2 en $\dfrac{\pi}{4}$.
6. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car ch l'est et ln l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $coh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   f_7 est paire, donc on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $f_7(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   On peut préciser avec une asymptote oblique : $f_7(x) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\ln(2)$, donc $x \mapsto x - \ln(2)$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_{f_7}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_7'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$.
   f_7 est positive sur $\mathbb{R}_+$, s'annule en 0, donc f_7 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec un minimum égal à 0 et 0.

Exercice B1.30 ✱

On a vu que sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. On note argsh sa bijection réciproque.
On sait déjà que argsh est strictement croissante, on connaît ses limites.
De plus sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{sh'(\operatorname{argsh} x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)}$.
Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh} x) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x) = 1$, donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)} = \sqrt{1+x^2}$ car ch est à valeurs positives.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice B1.31

Dans tous les exemples on peut commencer par une étude de la fonction pour se convaincre qu'elle est bien bijective sur les ensembles de départ et d'arrivée annoncés. Résoudre l'équation par équivalences en vérifiant bien l'existence et l'unicité de la solution suffit aussi à établir le caractère bijectif.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} y = f_5(x) &\Leftrightarrow y = e^{x+1} \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x + 1 \text{ car } y > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y) - 1. \end{aligned}$$

Donc f_5 est bijective et $f_5^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)-1 \end{array}$.

6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-2,1[$.

$$\begin{aligned} y = f_6(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x-4}{e^x+2} \\ &\Leftrightarrow y(e^x+2) = e^x-4 \\ &\Leftrightarrow e^x(y-1) = -2y-4 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{-2y-4}{y-1} \text{ car } y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-2y-4}{y-1}\right) \text{ car } \frac{-2y-4}{y-1} > 0 \text{ (à vérifier)} \end{aligned}$$

Donc f_6 est bijective et $f_6^{-1}: \begin{array}{rcl} :]-2,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{-2x-4}{x-1}\right) \end{array}$.

Exercice B1.32

Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une fonction dérivable strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

On étudie $g: x \mapsto f(x) - x$, dérivable sur $[0,1]$ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car f est décroissante, donc sa dérivée est négative.
De plus, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$ donc $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.
Finalement, g est continue, strictement décroissante et $0 \in [g(1), g(0)]$.
D'après le théorème de la bijection, $\exists! \alpha \in [0,1]$, $g(\alpha) = 0$. Autrement dit $\exists! \alpha \in [0,1]$, $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice B1.34

Soit $f: \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2-1) \end{array}$.

1. - $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $x^2 - 1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   - ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par composition, f est dérivable.
   $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.
2. $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} > 0$ donc f est strictement croissante. De plus elle est continue sur $]1,+\infty[$.
   $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $J = \mathbb{R}$.
3. Soit $(x,y) \in]1,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow e^y = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = e^y + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{e^y+1} \text{ car } x > 0. \end{aligned}$$

Finalement $f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{e^x+1} \end{array}$.

4. $\boxed{\textbf{M1}}$ f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{f^{-1}(x)^2 - 1}{2f^{-1}(x)} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$.

   $\boxed{\textbf{M2}}$ $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   D'après la formule de dérivée d'une composée, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$.