

# TD C1. Ensembles et applications

## Exercice C1.1

Donner la liste des éléments de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$  (rappel :  $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties de  $E$ ).

## Exercice C1.2

Écrire en extension les ensembles  $\mathcal{P}(\emptyset)$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ .

## Exercice C1.3

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer les assertions suivantes

- $A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$ ,
- $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$ ,
- $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ ,
- $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C)$ .

## Exercice C1.4

**Notation.** On note  $\neg P$  la négation de l'assertion  $P$ .

Soit  $E$  un ensemble. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses pour toutes parties  $A, B, C$  de  $E$ ?

- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$ ,
- $\neg(A \subset B) \Rightarrow (B \subset A)$ ,
- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ,
- $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C})$ .

## Exercice C1.5

Soit  $E$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_j)_{j \in J}$  deux recouvrements disjoints de  $E$  ( $I$  et  $J$  étant eux-même des ensembles).

Montrer que  $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est également un recouvrement disjoint de  $E$ .

## Applications

### Exercice C1.6

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

$$(a) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \end{array}, \quad (b) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}, \quad (c) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}.$$

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$(a) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}, \quad (b) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}, \quad (c) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - 3y) \end{array}.$$

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

$$(a) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - 3y, x + 2y) \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (y, z, x) \end{array}, \quad (c) \quad \begin{array}{l} \varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto 2f + \text{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}.$$

### Exercice C1.7

L'application  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^z$  est-elle injective ? surjective ?

**Exercice C1.8**

Soit  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$  telles que  $g \circ f$  et  $h \circ g$  soient bijectives. Montrer que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont bijectives.

**Exercice C1.9** ⚙️

Soit  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ .

1. Montrer que si  $g \circ f$  est injective et  $f$  surjective, alors  $g$  est injective.
2. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective et  $g$  injective, alors  $f$  est surjective.

**Exercice C1.10** ⚙️

Soit  $f : E \rightarrow F$ .

1. Montrer que si  $A \subset E$ , alors  $A \subset f^{-1}(f(A))$ . Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur  $f$  peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si  $B \subset F$ , alors  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ . Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur  $f$  peut-on avoir égalité ?
3. Soient  $A_1, A_2$  deux parties de  $E$ .

(a) Montrer que

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(b) Soient  $A_1, A_2$  deux parties de  $E$ . Montrer que

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

4. Soient  $B_1, B_2$  deux parties de  $F$ .

(a) Montrer que

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

(b) Montrer que

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

**Exercice C1.11** ⚙️

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On définit  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ . Montrer que si  $f$  est injective, alors  $F$  est

$$x \mapsto f([0, x])$$

injective.

**Exercice C1.12** ⚙️⚙️

Étant donnée  $f : E \rightarrow F$ , on note

$$f_d : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \quad \text{et} \quad f_r : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$A \mapsto f(A) \qquad \qquad B \mapsto f^{(-1)}(B)$$

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f_d$  est injective.
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $f_r$  est injective.

**Relations binaires****Exercice C1.13**

On définit sur  $\mathbb{R}$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$ .

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et décrire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la classe d'équivalence de  $x$ .

**Exercice C1.14** ⚙️

On définit sur  $\mathbb{Z}$  la relation binaire  $\sim$  par :  $\forall p, q \in \mathbb{Z}, p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, 2^n a = b$ .

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 0, 1, -1, 28.

**Exercice C1.15**

On définit sur  $\mathbb{R}$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ .

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence pour cette relation.

**Exercice C1.16** ⚙️

Soit  $E$  muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$ . Étant donné un ensemble  $X$ , on note  $F = \mathcal{F}(X, E)$  l'ensemble des fonctions de  $X$  dans  $E$ .

On définit sur  $F$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall f, g \in F, f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) \leq g(x).$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $F$ . Est-ce une relation d'ordre total ?

**Exercice C1.17**

Soit  $E$  un ensemble. On dit qu'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est une relation d'**ordre strict** lorsqu'elle est transitive, antisymétrique et **irréflexive** (i.e.  $\forall x \in E$ , on n'a pas  $x\mathcal{R}x$ ).

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur  $E$ . On définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y).$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre strict sur  $E$ .

**Remarque.** Ceci montre qu'une relation d'ordre permet toujours de définir une relation d'ordre strict, dont on dit qu'elle lui est associée.

**Exercice C1.18** ⚙️⚙️

Soit  $E, F$  deux ensembles munis chacun d'une relation d'ordre, notées respectivement  $\leq_E$  et  $\leq_F$ . On note  $<_E$  et  $<_F$  les relations d'ordre strict associées (voir exercice ci-dessus). On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est

- **croissante** lorsque  $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \leq_E x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_F f(x_2)$ ,
- **strictement croissante** lorsque  $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 <_E x_2 \Rightarrow f(x_1) <_F f(x_2)$ .

1. Écrire les définitions d'une fonction décroissante et strictement décroissante.
2. Soit  $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  l'ensemble des parties non vides de  $\mathbb{N}$  muni de l'inclusion (qui, rappelons-le, est une relation d'ordre). On munit  $\mathbb{N}$  de la relation d'ordre usuelle et on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{N} \\ A &\longmapsto \min(A) \end{aligned} .$$

Montrer que  $\varphi$  est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?

3. Soit  $E$  un ensemble. On munit  $\mathcal{P}(E)$  de la relation d'ordre  $\subset$  et on définit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto \overline{A} \end{aligned} .$$

Montrer que  $\psi$  est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?