Chapitre C1

Ensembles et applications

Objectifs

- Opérations ensemblistes.
- Notions d'injectivité et de bijectivité.
- Notions d'image directe et d'image réciproque.
- Propriétés des relations binaires.

1 Ensembles

Un **ensemble** peut être vu comme une collection d'objets, appelés **éléments**. Un des axiomes de la théorie des ensemble est l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément, appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Notation. On note $x \in E$ le fait qu'un objet x appartienne à un ensemble E.

Définition C1.1

On dit qu'un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E et on note $F \subset E$ lorsque

$$\forall x \in F,\, x \in E.$$

On dit aussi que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Remarque. Autrement dit : $F \subset E \Leftrightarrow \forall x,\, (x \in F \Rightarrow x \in E)$.

Notation. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

Théorème C1.2

Soit A et B des ensembles. On a

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Remarque. On a plusieurs manières de décrire un ensemble : en extension (*i.e.* par une énumération complète de ses éléments) ou en compréhension ($\{x \mid P(x)\}$, où $P(x)$ est un prédicat).

Définition C1.3

Étant données deux parties A et B d'un ensemble E, on définit

(i) la **réunion** de A et B : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$,

(ii) l'**intersection** de A et B : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$,

(iii) la **différence** de B et A : $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\} = B \cap \overline{A}$.

(iv) le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = E \setminus A$.

On dit que A et B sont **disjointes** si leur intersection est vide.

Notations. On peut aussi noter $\complement_E A = E \setminus A$, surtout s'il est nécessaire de préciser l'ensemble ambiant. Si l'ensemble E est sous-entendu, on peut aussi rencontrer $A^c = \overline{A}$.

Proposition C1.4

Étant données 3 parties A, B et C d'un ensemble E, on a

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(ii) $\overline{\overline{A}} = A$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Remarque. À l'aide de ces opérations, on peut encore définir la **différence symétrique** : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, qui correspond à un « ou exclusif ».

Définition C1.5

Soit E et I deux ensembles. Étant donnée $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, on appelle

(i) **réunion** des (A_i) :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\},$$

(ii) **intersection** des (A_i) :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}.$$

Proposition C1.6

Avec les mêmes notations, soit X une partie de E. On a

(i) $\displaystyle \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap X = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap X)$,

(ii) $\displaystyle \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup X = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup X)$,

(iii) $\displaystyle \bigcup_{i \in I} A_i \subset X \Leftrightarrow (\forall i \in I,\, A_i \subset X)$,

(iv) $\displaystyle X \subset \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I,\, X \subset A_i)$.

Définition C1.7

Soit E et I deux ensembles. Étant donnée $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, on dit que

(i) $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** de E lorsque

- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$,
- $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

(ii) $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** de E lorsque c'est un recouvrement disjoints tel que, de plus, $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$.

Définition C1.8

Étant donnés deux ensembles E et F, on définit l'**ensemble produit** $E \times F$ par

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

2 Applications

Définition C1.9

Soient E et F deux ensembles non vides. Une **fonction** ou **application** f de E vers F est une correspondance qui à tout élément $x \in E$ associe un unique élément de F, noté $f(x)$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image** de x et que x est un **antécédent** de y par f.
E s'appelle **ensemble de définition** ou **ensemble de départ** de f et F son **ensemble d'arrivée**.
On définit le **graphe** de f comme la partie $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ de $E \times F$.

Notation. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.
Exemples.

- On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x.$$

  Son graphe est appelé **diagonale** de $E \times E$.

- Soit $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Définition C1.10

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$.

(i) Si $f : E \to F$, on appelle **restriction** de f à A l'application $f|_A : A \to F$ définie pour tout $x \in A$ par $f|_A(x) = f(x)$.

(ii) Si $g : A \to F$, on dit que $f : E \to F$ est un **prolongement** de g à E si $g = f|_A$.

Définition C1.11

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle **composée** de f et g et on note $g \circ f$ l'application $x \mapsto g(f(x))$ de E dans G.

Définition C1.12

Soit $f : E \to F$. On dit que

(i) f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent ;

(ii) f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un anétécédent ;

(iii) f est **bijective** si tout élément de F adment exactement un antécédent.

Remarques.

- Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.
- On utilise le plus souvent cette caractérisation de l'injectivité :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou parfois sa contraposée.

Théorème et définition C1.13

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{id}_F\,.$$

Cette application est appelée **bijection réciproque** de f et notée f^{-1}.

Remarque. C'est l'application de F dans E qui a tout élément y de F associe son unique antécédent par f :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition C1.14

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(iii) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(iv) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

(v) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(vi) Si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque. Évident mais pas anodin : par conséquent, la composée de deux bijections est une bijection.

Définition C1.15

Soit $f : E \to F$.

(i) Étant donnée $A \subset E$, on appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

(ii) Étant donnée $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Remarque. . Si f est bijective, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image directe de B par la bijection réciproque f^{-1}. Mais la notation $f^{-1}(B)$ reste valable même si f n'est pas bijective et dans ce cas, parler de l'application f^{-1} n'a bien sûr aucun sens.

3 Relations binaires

Définition C1.16

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est la donnée d'une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$.
Étant donnés $x, y \in E$, on dit que x est **en relation avec** y (et on note $x\mathcal{R}y$) lorsque $(x, y) \in \mathcal{G}$.

Définition C1.17

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est

(i) **réflexive** lorsque $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$,

(ii) **symétrique** lorsque $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

(iii) **transitive** lorsque $\forall x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

(iv) **antisymétrique** lorsque $\forall x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = x$.

Définition C1.18

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

(i) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

(ii) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'**ordre total** lorsque de plus :

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

(iii) Dans le cas contraire, on dit que c'est une relation d'**ordre partiel**

Définition C1.19

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

(i) On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

(ii) Dans ce cas, pour tout $x \in E$, on définit la **classe d'équivalence** de x par :

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition C1.20

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $x, y \in E$.

- Si $x\mathcal{R}y$, alors $\overline{x} = \overline{y}$.
- Sinon $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Proposition C1.21

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors $\{\overline{x} \mid x \in E\}$ forme une partition de E.

Méthodes

- Démonstration de relations ensemblistes :
  - ➢ inclusion d'ensembles,
  - ➢ être dans une intersection d'ensembles,
  - ➢ être dans une réunion d'ensembles.
- Caractérisation de l'appartenance à
  - ➢ une image directe,
  - ➢ une image réciproque.
- Caractérisation d'une application
  - ➢ injective,
  - ➢ surjective.
- Vérifier qu'une relation binaire est
  - ➢ une relation d'ordre,
  - ➢ une relation d'équivalence.