TD C1. Ensembles et applications

Exercice C1.1

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$ (rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

Exercice C1.2

Écrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice C1.3 ✲

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer les assertions suivantes

1. $A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$,
2. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$,
3. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$,
4. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C)$.

Exercice C1.4 ✲

Notation. On note $\neg P$ la négation de l'assertion P.

Soit E un ensemble. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses pour toutes parties A, B, C de E ?

1. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$,
2. $\neg(A \subset B) \Rightarrow (B \subset A)$,
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
4. $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C})$.

Exercice C1.5 ✲

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux recouvrements disjoints de E (I et J étant eux-même des ensembles).

Montrer que $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est également un recouvrement disjoint de E.

Applications

Exercice C1.6

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x - 3y) \end{array}$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - 3y, x + 2y) \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y, z, x) \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}$.

Exercice C1.7 ✲

L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice C1.8

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice C1.9 ✲

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice C1.10 ✲

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si $B \subset F$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
3. Soient A_1, A_2 deux parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
   Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (b) Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que
   $$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$
4. Soient B_1, B_2 deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
   (b) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Exercice C1.11 ✲

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On définit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ x & \mapsto & f([0,x]) \end{array}$. Montrer que si f est injective, alors F est injective.

Exercice C1.12 ✲✲

Étant donnée $f : E \to F$, on note

$$f_d : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f_r : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{(-1)}(B) \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si f_d est injective.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si f_r est injective.

Relations binaires

Exercice C1.13

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x.

Exercice C1.14 ✲

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\sim$ par : $\forall p, q \in \mathbb{Z},\ p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ 2^n a = b$.
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 0, 1, -1, 28.

Exercice C1.15

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence pour cette relation.

Exercice C1.16

Soit E muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$. Étant donné un ensemble X, on note $F = \mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E.
On définit sur F la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall f, g \in F,\ f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur F. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice C1.17

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'**ordre strict** lorsqu'elle est transitive, antisymétrique et **irréflexive** (*i.e.* $\forall x \in E$, on n'a pas $x\mathcal{R}x$).
Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur E. On définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ et } x \neq y).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict sur E.
Remarque. Ceci montre qu'une relation d'ordre permet toujours de définir une relation d'ordre strict, dont on dit qu'elle lui est associée.

Exercice C1.18

Soit E, F deux ensembles munis chacun d'une relation d'ordre, notées respectivement $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$. On note $<_E$ et $<_F$ les relations d'ordre strict associées (voir exercice ci-dessus). On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est

- **croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \leqslant_E x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant_F f(x_2)$,
- **strictement croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 <_E x_2 \Rightarrow f(x_1) <_F f(x_2)$.

1. Écrire les définitions d'une fonction décroissante et strictement décroissante.
2. Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ muni de l'inclusion (qui, rappelons-le, est une relation d'ordre). On munit $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre usuelle et on définit l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \min(A) \end{array}.$$

   Montrer que φ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?
3. Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on définit l'application

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}.$$

   Montrer que ψ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?