Problème 1

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b.
   (a) $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de B (voir cours).
   (b) $\dfrac{d-a}{d-b} = i \Leftrightarrow AD = BD$ et $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}) = \dfrac{\pi}{2}$. De même $AF = BF$ et $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FA}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc ABF et ABD sont les deux triangles rectangles isocèles portés par l'hypoténuse $[AB]$. Ils forment un quadrilatère aux quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Donc $\boxed{ADBF \text{ est un carré}}$.
2. ABC est équilatéral si et seulement s'il est isocèle avec un angle de $\pm\dfrac{\pi}{3}$. Ceci équivaut à $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{3}$, *i.e.* $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$ et $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$, soit encore $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

3. **Initialisation :** pour $n = 2$, l'inégalité est vérifiée, c'est l'inégalité triangulaire classique.
   Hérédité : soit $n \geqslant 2$. Supposons que

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$$

   Pour tous $z_1, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, on applique l'inégalité triangulaire avec $z = z_1 + \ldots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$. Ainsi,

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

   Puis on applique l'hypothèse de récurrence au premier de ces deux termes. D'où

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

   $\boxed{\text{CQFD}}$.
4. Cas d'égalité dans le cas $n = 2$.
   (a)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2| \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \text{ si et seulement si } \operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2|}$.
   (b) On a donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}z_2|$.
   Or pour $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| = \operatorname{Re} Z$ si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ (en posant $Z = x + iy$), ce qui

équivaut à $y=0$ et $x \geqslant 0$, soit $Z \in \mathbb{R}_+$.
Donc on a

$$\begin{aligned}|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| &\Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}_+\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\overline{z_1}z_2) \equiv 0\,[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\overline{z_1})+\operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0\,[2\pi]\\ &\Leftrightarrow -\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0\,[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_2)\,[2\pi].\end{aligned}$$

5. On suppose la propriété vraie au rang n, c'est à dire :

$$|z_1+\ldots+z_n| = |z_1|+\ldots+|z_n| \text{ si et seulement si } \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \operatorname{Arg}(z_n)[2\pi].$$

Soient $z_1,\ldots,z_{n+1}$ des nombres complexes tels que

$$|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| = |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|.$$

(a) On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|$$

Les deux termes extrémaux étant égaux, toutes les inégalités sont des égalités.
Ainsi $|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}|$ et $|z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|$.
Donc $\boxed{|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}| \text{ et } |z_1+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|}$.

(b) D'après l'hypothèse de récurrence, la deuxième de ces égalités montre que $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \operatorname{Arg}(z_n)[2\pi]$. Tous ces arguments étant égaux, l'argument de la somme de ces nombres est aussi le même, on a alors $\operatorname{Arg}(z_1+\ldots+z_n) \equiv \operatorname{Arg}(z_1)\,[2\pi]$ (géométriquement, les vecteurs associés sont colinéaires).
D'après la question (4b), la première des deux égalités précédentes donne $\operatorname{Arg}(z_1+\ldots+z_n) \equiv \operatorname{Arg}(z_{n+1})\,[2\pi]$.
Finalement $\boxed{\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \operatorname{Arg}(z_{n+1})[2\pi]}$.
On a donc démontré par récurrence une condition nécessaire et suffisante au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
$\boxed{\text{on a égalité si et seulement si les arguments des nombres considérés sont égaux modulo } 2\pi}$.

C Caractérisation d'un polygone régulier

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

(a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\boxed{|z_k| = \rho}$.
La relation $(\overrightarrow{OM_{k-1}},\overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2\pi}{n}$, se traduit par $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_k}{z_{k-1}}\right) = \operatorname{Arg}(z_k)-\operatorname{Arg}(z_{k-1}) = \dfrac{2\pi}{n}$. Donc les arguments des z_k suivent une progression arithmétique.
D'où $\boxed{\operatorname{Arg}(z_k) = \theta+(k-1)\dfrac{2\pi}{n}}$.

(b) Sous forme exponentielle, cela donne $z_k = \rho e^{i(\theta+(k-1)\frac{2\pi}{n})}$, soit $z_k = z_1\omega^{k-1}$.
Donc pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega^{n+1-k}z_k = \omega^n z_1 = z_1$.
Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k}z_k = nz_1}$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = nz_1$.

   (a) On a alors $\left|\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right| = |nz_1| = \boxed{n\rho}$.

   On constate alors que $\left|\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |\omega^{n+1-k} z_k|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

   D'après la partie précédente, les arguments de tous les termes de cette somme sont égaux, à savoir

$$\forall k \in \{1 \dots n\},\ \mathrm{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv \mathrm{Arg}(z_1)\ [2\pi].$$

   (b) Cette relation donne, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\mathrm{Arg}(\omega^{n+1-(k+1)} z_{k+1}) - \mathrm{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv 0\ [2\pi]$.

   D'où $\mathrm{Arg}(z_{k+1}) - \mathrm{Arg}(z_k) \equiv \mathrm{Arg}(\omega) = \dfrac{2\pi}{n}$.

   D'où, en termes d'angles, $\boxed{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}}$.

   De plus on a bien $\boxed{(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \dfrac{2\pi}{n}}$ car $\mathrm{Arg}(\omega z_n) = \mathrm{Arg}(z_1)$. Le polygone est bien régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. 1,j et j^2 sont les racines troisièmes de l'unité, donc leur somme vaut $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$.

   En écrivant $1 = -j - j^2$, on obtient $a(-j - j^2) + jb + j^2c = 0$.

   Alors $j(b-a) + j^2(c-a) = 0$, d'où $\dfrac{c-a}{b-a} = -\dfrac{1}{j} = -j^2$.

   Le module nous donne $\boxed{AC = AB}$ et l'argument $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Arg}(-j^2) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

   Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\pi/3$. Il est donc $\boxed{\text{équilatéral}}$.

10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

   (a) Comme ABC est régulier, la condition nous donne, avec $n = 3$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ et $z_3 = c$, $a + j^2b + jc = 3a$. De même, on obtient $b + j^2c + ja = 3b$ et $c + j^2a + jb = 3c$ comme suggéré par l'indication. On combine ces trois équations :

   $3(a + jb + j^2c) = (a + j^2b + jc) + j(b + j^2c + ja) + j^2(c + j^2a + jb) = 3(1 + j + j^2)(a + b + c) = 0$.

   Donc $\boxed{a + jb + j^2c = 0}$.

   (b) On a $a' + jb' + j^2c' = a + jb + j^2c - \dfrac{a+b+c}{3} \underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} = a + jb + j^2c$.

   Donc $\boxed{a' + jb' + j^2c' = 0 \text{ si et seulement si } a + jb + j^2c = 0}$.

   $\dfrac{a+b+c}{3}$ est l'affixe de G, centre de gravité du triangle ABC. Ce triangle est équilatéral donc $GA = GB = GC$. C'est-à-dire $\boxed{|a'| = |b'| = |c'|}$.

Pour finir, sous notre hypothèse (ABC équilatéral), on remarque que a',b',c' sont les affixes des sommets A',B',C' d'un triangle équilatéral également, image de ABC par la translation d'un vecteur d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.
De plus, $|a'| = |b'| = |c'|$. On peut donc leur appliquer la question (10a) et en déduire que $a'+jb'+j^2c' = 0$, ce qui implique, d'après le début de cette question (10b), que $\boxed{a+jb+j^2c=0}$.

Problème 2

1. Pour $a=b=0$, on a $f(0)=2f(0)$, donc $\boxed{f(0)=0}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, pour $a = x_0$ et $b = x - x_0$, on obtient :

$$f(x) = f(x_0) + f(x-x_0).$$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ et comme f est continue en 0, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0) = 0$. Donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x-x_0) = 0$. Puis, par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = (x_0)}$.
D'où le résultat.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$, par récurrence sur n.

(a) **Init.** Pour $n=0$, $f(nx) = 0 = nf(x)$, d'après la question précédente.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(nx) = nf(x)$. On a alors :

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Donc, d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n < 0$. On a $0 = f(0) = f(nx-nx) = f(nx)+f(-nx)$. D'où $f(nx) = -f(-nx)$.
Or $-n \in \mathbb{N}$, donc d'après ce qui précède, $f(nx) = -(-n)f(x) = nf(x)$.
Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{m}{n}$. Ainsi $nx = m \times 1$. D'après la question précédente, on a alors $nf(x) = f(nx) = f(m\times 1) = mf(1) = \lambda m$. On en déduit $f(x) = \lambda\dfrac{m}{n} = \lambda x$.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \lambda x}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
Comme f est continue en x, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x)$.
D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = \lambda u_n$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lambda x$. Donc $\boxed{f(x) = \lambda x}$ par unicité de la limite.

2. On a montré que si f est continue en 0 et vérifie (E_1), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$.
Réciproquement, on vérifie aisément que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$, alors f est continue en 0 et vérifie (E_1).
On a donc montré par double inclusion :

$$\boxed{\text{L'ensemble des fonctions continues en 0 qui vérifient } (E_1) \text{ est } \{x \mapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

3. (a) Par définition :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

(b) Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b) = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1} = \frac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}+1\right)+\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b) = \frac{2\left(e^{2(a+b)}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}}$$

$$1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b) = 1+\frac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)} = \frac{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)+\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b) = \frac{2\left(e^{2(a+b)}+1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}}$$

$$\operatorname{th}(a+b)\left(1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)\right) = \frac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}\times\frac{2\left(e^{2(a+b)}+1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)} = \frac{2\left(e^{2(a+b)}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{th}(a+b)\left(1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)\right) = \operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}.$$

Donc $\boxed{\text{La fonction th vérifie } (E_3)}$.

(c) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0.$$

Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x) = 1$. D'où le résultat, d'après le théorème de la bijection. Donc $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1,1[}$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $-x \in \mathbb{R}$ et comme $f(0) = 0$, on a :

$$f(x)+f(-x) = f(0)\left(1+f(x)f(-x)\right) = 0.$$

Donc $f(-x) = -f(x)$.

D'autre part, pour $a = b = x$, on a $2f(x) = f(2x)\left(1+(f(x))^2\right)$. Comme $1+(f(x))^2 > 0$,

$$\boxed{f \text{ est impaire et } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}}.$$

(b) Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$, par récurrence sur n.

$\boxed{\textbf{Init.}}$ Pour $n = 0$, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0) = 1$.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$. Posons $y = f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)$. D'après la question précédente pour $x = \frac{x_0}{2^{n+1}}$, on a alors :

$$\frac{2y}{1+y^2} = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1.$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned}2y &= 1+y^2\\ 0 &= 1-2y+y^2\\ 0 &= (1-y)^2\end{aligned}$$

Donc $y=1$, *i.e.* : $f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)=1$.

Donc, d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=1}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=1$. D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_0}{2^n}=0$ et f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f(0)$. Donc, par unicité de la limite $f(0)=1$, ce qui contredit $f(0)=0$.

(c) Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question4a :

$$f(x)=f\left(2\frac{x}{2}\right)=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}.$$

Posons $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On a $(y-1)^2=y^2-2y+1\geq 0$, d'où $2y\leqslant 1+y^2$, puis $\dfrac{2y}{1+y^2}\leq 1$. De même, $(y+1)^2=y^2+2y+1\geq 0$, d'où $-2y\leqslant 1+y^2$, puis $\dfrac{2y}{1+y^2}\geq -1$. Donc $-1\leq\dfrac{2y}{1+y^2}\leq 1$. On a donc montré $f(x)\in[-1,1]$.

D'autre part, d'après la question précédente, $f(x)\neq 1$. De plus, comme f est impaire, $-f(x)=f(-x)\neq 1$, donc $f(x)\neq -1$.

Donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ -1<f(x)<1}$$

(d) Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a $|f(a)|<1$ et $|f(b)|<1$, d'où $|f(a)f(b)|<1$ et donc $1+f(a)f(b)>0$. Ainsi :

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{\operatorname{th}(g(a))+\operatorname{th}(g(b))}{1+\operatorname{th}(g(a))\operatorname{th}(g(b))}.$$

Or, comme th vérifie (E_3) :

$$\frac{\operatorname{th}(g(a))+\operatorname{th}(g(b))}{1+\operatorname{th}(g(a))\operatorname{th}(g(b))}=\operatorname{th}(g(a)+g(b)).$$

On en déduit :

$$g(a+b)=\operatorname{argth}(f(a+b))=g(a)+g(b).$$

Donc $\boxed{g \text{ vérifie } (E_1)}$.

g est continue en 0 car f est continue en 0. Donc d'après les résultats de la partie A :

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\lambda x. \text{ On en déduit } \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{th}(\lambda x)}$$

5. On a montré que si f est continue en 0 et vérifie (E_3), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, alors f est continue en 0 et comme th vérifie (E_3) :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, f(a) + f(b) = \operatorname{th}(\lambda a) + \operatorname{th}(\lambda b) = \operatorname{th}(\lambda a + \lambda b)\left(1 + \operatorname{th}(\lambda a)\operatorname{th}(\lambda b)\right) = f(a+b)\left(1 + f(a)f(b)\right).$$

Donc f vérifie (E_3).

$$\boxed{\text{L'ensemble des fonctions continues en 0 qui vérifient } (E_3) \text{ est } \{x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$